ЗМІСТ

Вступ

Пропонований посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації, які здійснюють підготовку молодших спеціалістів на основі базової загальної середньої освіти. Посібник відповідає тому обсягу знань з алгебри і початків аналізу та геометрії, якими студенти мають оволодіти, щоб пройти державну підсумкову атестацію.

Він містить 22 самостійні роботи.

Кожна самостійна робота складається з двох частин:

- «Теоретичні відомості»;
- «Завдання для самостійного виконання».

У частині «Теоретичні відомості» наведено основні теоретичні відомості з певної теми, подані у формі конспекту, схем, графіків тощо. Це дозволить найбільш повно осмислити і систематизувати теоретичний матеріал. Також дана рубрика містить приклади розв'язування типових завдань, аналогічних до вправ, які пропонуватимуться розв'язати самостійно і які пропонуються на державній підсумковій атестації з математики.

У рубриці «Завдання для самостійного виконання» подано завдання, призначенні для закріплення вивченого матеріалу та перевірки навчальних досягнень, що дають можливість студентові самостійно вивчити матеріал і перевірити як теоретичні знання, так і відповідні навички. Задачі розміщені в порядку зростання складності і поділено на три рівні .

Рівень I містить задачі та вправи, репродуктивного характеру на 2-3 логічних кроки. Для їх розв'язування студентам достатньо знати правила, означення, формули, теореми та ознаки, передбачені навчальною програмою, а також вміти виконувати найпростіші тотожні перетворення, спрощення та обчислення.

Рівень II містить завдання на 4-6 логічних кроки, розв'язання яких вимагає від студентів творчого застосування одержаних знань з достатньо повним строгим обґрунтуванням ходу розв'язку.

Рівень III – це, як правило задачі та вправи, розв'язування яких вимагає вміння орієнтуватися в нестандартних ситуаціях, застосовувати оригінальні та штучні прийоми, глибини та строгості суджень.

Правильність виконання завдань можна перевірити за правильними відповідями, наведеними в кінці посібника.

Опрацювавши цей посібник, студенти зможуть систематизувати й узагальнити свої знання, уміння й навички з математики.

Самостійна робота №1

Розв'язування вправ на знаходження області визначення функції.

Теоретичні відомості

1. При знаходженні області визначення дробової функції потрібно виключити значення аргументу, при яких знаменник перетворюється в нуль.

2. Якщо аналітичний вираз функції має корінь парного степеня, то при знаходженні області визначення функції потрібно виключити значення аргументу, при яких підкореневий вираз приймає від'ємне значення.

Приклади

Знайти область значення наступних функцій:

1. $y=\dfrac{1}{x}$; **2.** $y=\dfrac{1}{2x-5}$; **3.** $y=\dfrac{3}{x^2-4}$; **4.** $y=\dfrac{x+2}{x^2-5x+6}$; **5.** $y=\sqrt{x-4}$;

6. $y=\sqrt{2x^2-6x}$; **7.** $y=\sqrt{3-2x-x^2}$; **8.** $y=\dfrac{4}{\sqrt{3x-15}}+\dfrac{8}{x^2-36}$.

Розв'язання:

1. Знаменник перетворюється на нуль при $x=0$. Дана функція приймає дійсні значення для всіх x, крім $x=0$. Отже, $x\neq 0$ і область визначення даної функції є інтервали $(-\infty;0)$ і $(0;\infty)$.

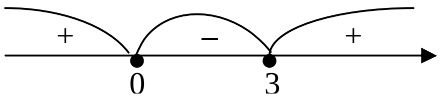
2. Виключимо значення аргументу, при яких знаменник перетворюється на нуль: $2x-5\neq 0$, звідки $x\neq 2{,}5$. Таким чином, отримуємо відповідь: $x\in(-\infty;2{,}5)\cup(2{,}5;\infty)$.

3. Прирівнюючи знаменник до нуля, розв'яжемо отримане рівняння: $x^2-4=0$; $x^2=4$; $x_1=-2$; $x_2=2$. Отже, знаменник перетворюється на нуль при $x=-2$ і $x=2$, які не можуть належати області визначення даної функції. Виключивши їх, отримаємо відповідь: $x\in(-\infty;2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.

4. Тут $x^2-5x+6\neq 0$, розв'язавши квадратне рівняння за теоремою Вієта, отримаємо $x_1\neq 2$, $x_2\neq 3$. Отже, відповідь: $x\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$.

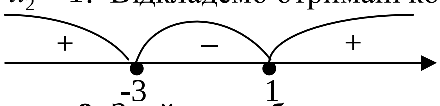
5. Ця функція має зміст лише в тому випадку, коли підкореневий вираз більше нуля або дорівнює нулю. Отже, $x-4\geq 0$, звідки $x\geq 4$. Отримуємо відповідь: $x\in[4;\infty)$.

6. Область визначення функції знайдемо з умови $2x^2-6x\geq 0$ або $2x(x-3)\geq 0$. Розв'язок цієї нерівності покажемо на числовій прямій:



Звідки, розв'язок цієї нерівності є значення $x\leq 0$, $x\geq 3$. Отже, відповідь: $x\in(-\infty;0]\cup[3;\infty)$.

7. Виключимо значення аргументу, при яких підкореневий вираз приймає від'ємні значення. Отже, $3-2x-x^2\geq 0$; $-x^2-2x+3\geq 0$; домножаємо нерівність на –1, при цьому всі знаки змінюються на протилежні: $x^2+2x-3\leq 0$. Щоб розв'язати цю нерівність, застосуємо метод інтервалів, а для цього розв'яжемо спочатку рівняння $x^2+2x-3=0$, звідки $x_1=-3$, $x_2=1$. Відкладемо отримані корені на числовій прямій:



Оскільки знак останньої нерівності «≤», то їй відповідає проміжок з «–», тобто $x\in[-3;1]$.

8. Знайдемо область визначення кожного доданка окремо. Спільна частина цих областей і буде областю визначення функції. Для першого доданка підкореневий вираз строго більше нуля $3x-15>0$, бо він знаходиться в знаменнику. Звідки $x>5$. Для другого доданка $x^2-36\neq 0$; $x^2\neq 36$; $x_1\neq -6$, $x_2\neq 6$. Тобто область визначення другого доданка множина всіх чисел, крім чисел –6 та 6. Покажемо розв'язки функції на числовій прямій:

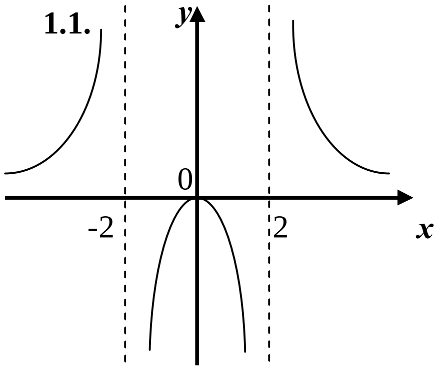
Відповідь: $x\in(5;6)\cup(6;\infty)$.

Завдання для самостійного виконання

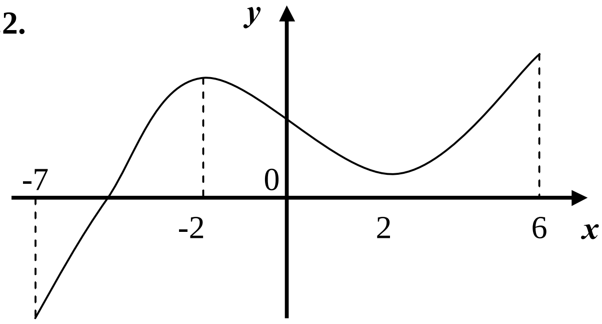
Рівень І

1. Вкажіть проміжки зростання і спадання функцій, графіки яких зображено на рисунках.

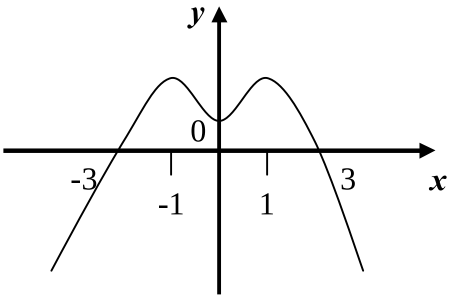
1.1.



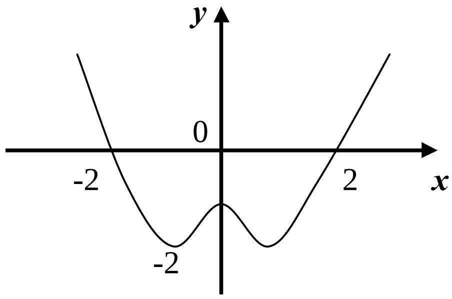
1.2.



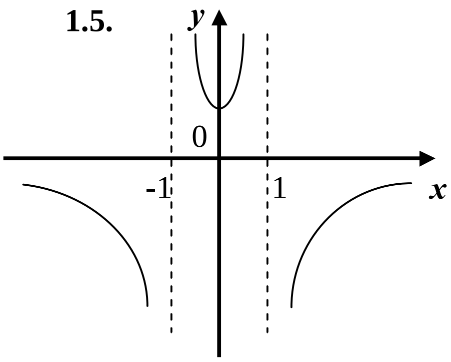
1.3.



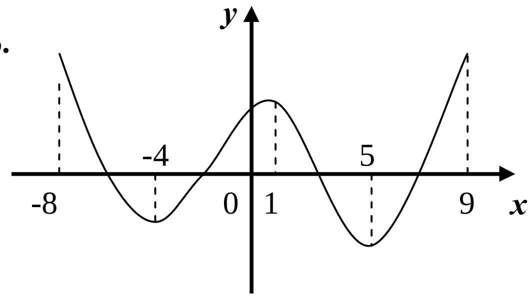
1.4.



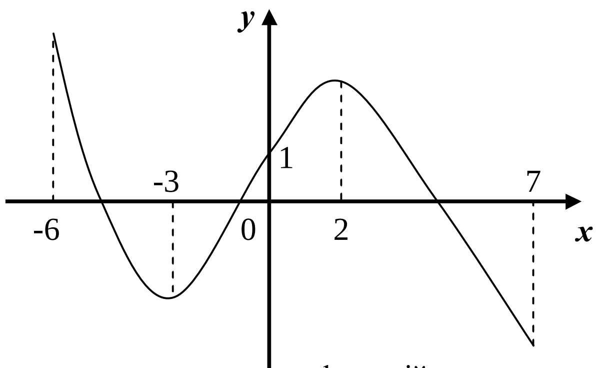
1.5.



1.6.



1.7.



2. Знайдіть область визначення наступних функцій:

2.1. $f(x) = \sqrt{x+5}$ **2.2.** $f(x) = \sqrt[6]{4-2x}$ **2.3.** $f(x) = \sqrt[4]{x-16}$

Рівень II

2.4. $f(x)=\dfrac{8}{\sqrt[8]{4x-32}}$. **2.5.** $f(x)=\sqrt{(x+2)(3-x)}$. **2.6.** $f(x)=\sqrt{x^2-7x+12}$

2.7. $f(x)=\sqrt{10+3x-x^2}$. **2.8.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+3}$. **2.9.** $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{2x-1}$

Рівень III

2.10. $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{4x-12}}+\dfrac{7}{x^2-16}$ **2.11.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}+9x}{x+2}$

2.12. $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{3x+2}}+\dfrac{1}{|x|-1}$ **2.13.** $f(x)=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-3x}{3x+1}}$

Самостійна робота №2

Розв'язування вправ на дії з степенями та коренями

Теоретичні відомості

1. Степінь з натуральними показниками

Нехай a – дійсне число, n – натуральне число $(n>1)$, тоді $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots a}_{n\text{ множників}}$.

Якщо $n=1$, тоді $a^1=a$. Число a – *основа степеня*, n – *показник степеня*.

Наприклад, $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16; (-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8;$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{81}; (-2)^6=-2\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=64.$$

Властивості степеня з натуральним показником:

1) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$

2) $a^n:a^m=a^{n-m}$, якщо $n>m$

3) $(a^n)^m=a^{nm}$

4) $a^n\cdot b^n=(ab)^n$

5) $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n, b\neq0$

2. Степінь з нульовим показником. Степінь з від'ємним цілим показником

Якщо $a\neq0$, то $a^0=1$.Наприклад: $(2{,}9)^0=1; (-8)^0=1$. Вираз 0^0 – не має смислу. Якщо $a\neq0$,n – натуральне число, тоді $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.Наприклад: $-2^{-3}=-\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{8}$

$(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$. Справедлива рівність $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

3. Арифметичний корінь

Арифметичним коренем n*-го степеня з невід'ємного числа* a (позначається $\sqrt[n]{a}$) називається невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a. Якщо $n=2$, то пишуть $\sqrt{a}$ і такий вираз називають *арифметичним квадратним коренем.*

Якщо $a<0$,n – натуральне парне число, то в області дійсних чисел $\sqrt[n]{a}$ не існує.

Якщо $a<0$,n – натуральне непарне число$(n>1)$, то $\sqrt[n]{a}$ існує.

Наприклад: $\sqrt[3]{-8}=-2$, оскільки $(-2)^3=-8; \sqrt[3]{-27}=-3$, оскільки $(-3)^3=-27$.

Властивості арифметичних коренів

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

2) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\quad(a\geq0,\ b\geq0)$

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad(a\geq0,\ b>0)(b\neq0)$

5) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}\quad(a\geq0)$

6) $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}\ (a\geq0)$

7) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a, \text{якщо } n-\text{ непарне число}\\ |a|, \text{якщо } n-\text{ парне число}\end{cases}$

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

4. Степінь з дробовим показником

Якщо $a \geq 0,\ m,\ \ n$ – натуральні числа $(n \geq 2)$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Якщо $a > 0$,то $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$. Нецілий степінь від'ємного числа не має смислу.

Властивості степенів з раціональними показниками

Якщо $a > 0, b > 0 r, s$ – будь-які раціональні числа, то:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$
3) $(a^r)^s = a^{rs}$
4) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$
5) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Приклад 1.Знайти значення виразу:

а) $81^{\frac{3}{4}}$ **б)** $4^{-\frac{1}{2}}$ **в)** $(-8)^{\frac{1}{3}}$ **г)** $\frac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}}$ **д)** $\sqrt[14]{64}\cdot\sqrt[7]{-16}$

Розв'язання:

а) $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$ *Відповідь:* 27

б) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ *Відповідь:*$\frac{1}{2}$

в) Вираз $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не має смислу

г) $\frac{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^3\cdot\sqrt[3]{4}}}}{\sqrt[6]{2^2\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^3\cdot 4}}}{\sqrt[6]{2^5\cdot\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[12]{\sqrt[3]{8^3\cdot 4}}}{\sqrt[6]{2^{10}\cdot\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[12]{(2^3)^3\cdot 2^2}}{\sqrt[6]{2^{10}\cdot 2}} = \frac{\sqrt[12]{2^9\cdot 2^2}}{\sqrt[12]{2^{11}}} = \frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{\sqrt[12]{2^{11}}} =$

$= \sqrt[12]{\frac{2^{11}}{2^{11}}} = \sqrt[12]{1} = 1$ *Відповідь:*1

д) $\sqrt[14]{64}\cdot\sqrt[7]{-16} = \sqrt[7\cdot 2]{8^2}\cdot\sqrt[7]{-16} = \sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16} = -\sqrt[7]{2^3\cdot 2^4} = -\sqrt[7]{2^7} = -2$

Відповідь: -2

Приклад 2.Винести множник за знак радикала (кореня):

а) $\sqrt[3]{m^8\cdot n^2}$ **б)** $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}$

Розв'язання:

а) $\sqrt[3]{m^8\cdot n^2} = \sqrt[3]{m^6\cdot m^2\cdot n^2} = \sqrt[3]{(m^2)^3\cdot m^2\cdot n^2} = \sqrt[3]{(m^2)^3}\cdot\sqrt[3]{m^2\cdot n^2} = m^2\cdot\sqrt[3]{m^2n^2}$

Відповідь: $m^2\cdot\sqrt[3]{m^2n^2}$

б) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}} = \sqrt[4]{2^4\cdot a^3\cdot b^8\cdot b^3} = \sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{(b^2)^4}\cdot\sqrt[4]{a^3b^3} = |2|\cdot|b^2|\cdot\sqrt[4]{a^3b^3} =$

$= 2b^2\cdot\sqrt[4]{a^3b^3}$ *Відповідь:* $2b^2\cdot\sqrt[4]{a^3b^3}$

Приклад 3.Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ **б)** $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$

Розв'язання:

а) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ *Відповідь:*$\sqrt{3}$

б) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{25}$ *Відповідь:*$\sqrt[3]{25}$

Приклад 4.Спростити вирази:

а) $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$ **б)**$\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}, a \geq 0$

Розв'язання:

а) $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}\cdot a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{a^{12}\cdot a^2} = \sqrt[6]{(a^2)^6}\cdot\sqrt[6]{a^2} = |a^2|\cdot\sqrt[6]{|a|^2} =$
$= |a^2|\cdot\sqrt[3]{|a|} = a^2\cdot\sqrt[3]{|a|}$ *Відповідь:* $a^2\cdot\sqrt[3]{|a|}$

б) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}, a \geq 0\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{a^4\cdot a}} = \sqrt[20]{a^5} = \sqrt[4]{a}$ *Відповідь:*$\sqrt[4]{a}$

Приклад 5.Спростити вираз $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$

Розв'язання:

$\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2} = \left|1-\sqrt{6}\right| = -\left(1-\sqrt{6}\right) = \sqrt{6}-1$

Відповідь:$\sqrt{6}-1$

Приклад 6. Позбутися ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ **б)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$

Розв'язання:

а) $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)((\sqrt{3}-1))} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = (\sqrt{3}-1)$.*Відповідь:*$(\sqrt{3}-1)$

б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{5-2} =$
$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}$. *Відповідь:*$\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}$

Приклад 7. Спростити вираз $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$

Розв'язання:

1) $\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}(a+\sqrt{ab})-ab}{a+\sqrt{ab}} = \frac{a\cdot\sqrt{ab}+ab-ab}{a+\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{ab}(a-\sqrt{ab})}{(a+\sqrt{ab})(a-\sqrt{ab})} =$
$= \frac{a^2\sqrt{ab}-a^2b}{a^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2} = \frac{a^{\cancel{2}}(\sqrt{ab}-b)}{\cancel{a}(a-b)} = \frac{a(\sqrt{ab}-b)}{a-b}$;

2) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{a(\sqrt{ab}-b)\cancel{(a-b)}^1}{\cancel{(a-b)}_1\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{ab}-b)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)} = \frac{a(\sqrt{ab}-b)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{ab}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} =$
$= \frac{a\left(\overset{1}{\cancel{\sqrt{ab}-b}}\right)\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{ab}-b}}} = a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)$. *Відповідь:* $a\left(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}\right)$

Приклад 8. Спростити вираз $\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}$

Розв'язання:

1) $\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{\sqrt[4]{ax}\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = -\sqrt[4]{ax}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{-\left(\sqrt[4]{ax}\right)^2+1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} =$

$= \frac{-\cancel{\sqrt{ax}}+1+\cancel{\sqrt{ax}}}{\sqrt[4]{ax}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ax}};$

2) $\left(\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[4]{ax}\right)^2 = \sqrt{ax};$

3) $\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2} = \left|1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right|;$

4) $\sqrt{ax}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right) = \sqrt{ax}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\cancel{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\cancel{\sqrt{x}}} = \sqrt{a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$

Відповідь:$\sqrt{a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$

Завдання для самостійного виконання

Рівень I

1. Спростити вираз:

1.1. $a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$ **1.2.** $a^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{1}{2}}$ **1.3.** $a^5:a^{-2}$ **1.4.** $n^{-3,6}\cdot n^{1,6}$ **1.5.** $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$

1.6. $c^{0,6}\cdot c^{4,4}\cdot c^{-3}$ **1.7.** $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

2. Скоротити дріб:

2.1. $\frac{a^{\frac{1}{4}}-36}{a^{\frac{1}{8}}-6}$ **2.2.** $\frac{a+27}{a^{\frac{1}{3}}+3}$

3. Знайдіть значення виразу:

3.1. $9^{4m}\cdot 9^{-2m}$ при $m=\frac{1}{4}$ **3.2.** $16^{-4n}\cdot 16^{2n}$ при $n=\frac{1}{4}$

4.Спростити вираз:

4.1. $\sqrt[10]{n^5}$ **4.2.** $\sqrt[6]{a^{36}}$ **4.3.** $\sqrt{\sqrt[8]{b}}$ **4.4.** $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$

4.5. $\sqrt{\left(\sqrt{15}-4\right)^2}+\left(\sqrt{15}+4\right)^2$ **4.6.** $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$

5.Скоротити дріб:

5.1. $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$ **5.2.** $\frac{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}$

6. Внести множник під знак кореня:

6.1. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$ **6.2.** $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$

7. Звести радикал до найпростішого вигляду:

7.1. $\sqrt{9a^5b^2}$ **7.2.** $\sqrt[3]{54y^8}$

8. Звільнитись від раціональності в знаменнику дробу:

8.1. $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ **8.2.** $\frac{18}{\sqrt[4]{27}}$

9. Обчисліть:

9.1. $\sqrt[5]{3^{20}}$ **9.2.** $\sqrt[4]{5^4\cdot 2^8}$ **9.3.** $\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt[5]{14}\right)^5$ **9.4.** $\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{3}\right)^4$ **9.5.** $\left(2\sqrt[4]{3}\right)^4-\sqrt[5]{4^5}$

10. Порівняйте числа:

10.1. $\sqrt[9]{4}$ і $\sqrt[9]{11}$ **10.2.** $2\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[4]{26}$ **10.3.** $\sqrt[10]{7}$ і $\sqrt[5]{3}$ **10.4.** $3\sqrt[3]{8}$ і $2\sqrt[3]{3}$

Рівень II

11. Спростити вираз:

11.1. $x^{-1}y^{\frac{5}{4}}\left(x^{-\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{14}}\right)^{-3,5}$ **11.2.** $\frac{a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{12}}}\cdot\frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$ **11.3.** $\frac{a-9a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+3a^{\frac{1}{2}}}$

11.4. $\frac{16}{b+8b^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{b^{\frac{1}{2}}}$ **11.5.** $\frac{4x^{\frac{1}{2}}-8}{4x-4x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\frac{2x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-2}$ **11.6.** $\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{3}}\right)^{1\frac{1}{5}}\cdot a^{0,7}b^{0,4}$

11.7. $\left(\frac{b^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{7}{18}}}\cdot\frac{b^{\frac{2}{7}}}{b^{-\frac{5}{7}}}\right)^9$ **11.8.** $\frac{a^{0,3}}{a^{0,5}-5}-\frac{5}{a^{0,5}+5}+\frac{50}{25-a}$

12. Знайдіть значення виразу:

12.1. $\frac{3a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}}$, при $a=5$ **12.2.** $\frac{\left(m^8n^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{1}{3}}\,n^{\frac{19}{18}}}$, при $m=14$, $n=16$

13. Обчисліть:

13.1. $(2^{0,7})^{-0,7}\cdot(0,5)^{3,49}$ **13.2.** $\frac{25^{-\frac{2}{5}}\cdot 5}{125^{\frac{1}{15}}}$ **13.3.** $325^{-2,25}\cdot 25^{-\frac{2}{3}}\cdot 125^{\frac{25}{9}}$

13.4. $\left(\frac{7^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}\cdot 14}\right)^4$ **13.5.** $\left(\frac{8^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}\right)^2\cdot\left(\frac{10^{\frac{2}{5}}\cdot 10^{-\frac{1}{2}}}{10^{-0,1}}\right)^{-4}$ **13.6.** $\left(\frac{4^4\cdot 5^{-3}}{7^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{-\frac{9}{4}}}\right)^2$

13.7. $\frac{\sqrt[4]{27\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot 3^2\cdot\sqrt{3}}}$ **13.8.** $\frac{3}{6-2\sqrt{6}}+\frac{3}{6+2\sqrt{6}}$

13.9. $\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5}\right)$ **13.10.** $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$

13.11. $\left(\sqrt[4]{49}+\sqrt[6]{125}\right)\left(\sqrt[4]{49}-\sqrt[6]{125}\right)$ **13.12.** $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$

14. Скоротити вираз:

14.1. $\left(\frac{\sqrt{a}-8}{\sqrt{a}+8}-\frac{\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}-8}\right):\frac{16\sqrt{a}}{64-a}$ **14.2.** $\frac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt{m}}:\frac{\sqrt{m}-2\sqrt[4]{mn}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{mn}}$

14.3. $\sqrt{\left(\sqrt{a}+2\right)^2-8\sqrt{a}}+\sqrt{\left(\sqrt{a}-2\right)^2+8\sqrt{a}}$

Самостійна робота №3

Ірраціональні рівняння

Теоретичні відомості

Рівняння, у яких змінна знаходиться під знаком кореня, називаються *ірраціональними*. Для розв’язування такі рівняння найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою таких перетворень:

– заміна змінних;

– піднесення обох частин рівняння до одного степеня. При цьому треба пам’ятати, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому. При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з’явитися сторонні корені, які відсіюються перевіркою.

У деяких випадках при розв’язуванні рівнянь,що містять корені парних степенів, доцільніше відсіювати сторонні корені не перевіркою, а знаходженням області допустимих значень змінної.

Приклад 1.Розв’язати рівняння $\sqrt{3x-2}+x=4$

Розв’язання::

Відокремимо радикал (залишимо його в лівій частині), а решту членів рівняння перенесемо в праву частину: $\sqrt{3x-2}=4-x$.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$(\sqrt{3x-2})^2=(4-x)^2$, звідси $3x-2=16-8x+x^2$.

Зведемо одержане рівняння до стандартного вигляду і розв’яжемо його:

$x^2-8x-3x+16+2=0$; $x^2-11x+18=0$; $x_1=2$, $x_2=9$.

Перевірка

1) $x_1=2$. У лівій частині маємо:$\sqrt{3\cdot 2-2}+2=\sqrt{4}+2=2+2=4$.

Права частина дорівнює 4, $4=4$. Отже, $x_1=2$ є коренем даного ірраціонального рівняння.

2) $x_2 = 9$. У лівій частині маємо: $\sqrt{3 \cdot 9 - 2} + 9 = \sqrt{25} + 9 = 5 + 9 = 14$. Права частина дорівнює 4, $4 \neq 14$. Отже, $x = 9$ не є коренем рівняння.

Відповідь: 2.

Приклад 2. $\sqrt{4x + 8} + \sqrt{3x - 2} = 2$.

Розв'язання:

Маємо два радикали, позбутися яких одночасно піднесенням до квадрата неможливо. Тому відокремимо один з радикалів, а потім піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Матимемо:

$\sqrt{4x + 8} = 2 - \sqrt{3x - 2}, \quad (\sqrt{4x + 8})^2 = (2 - \sqrt{3x - 2})^2,$

$4x + 8 = 4 - 4\sqrt{3x - 2} + 3x - 2, \quad 4\sqrt{3x - 2} = -x - 6,$

$(4\sqrt{3x - 2})^2 = (-(x + 6))^2; \quad 16(3x - 2) = x^2 + 12x + 36,$

$x^2 - 36x + 68 = 0,$ звідси $x_1 = 2; \quad x_2 = 34.$

Обидва ці корені для даного ірраціонального рівняння є сторонніми (перевірте це).

Зауважимо, що під час розв'язування рівнянь немає потреби заздалегідь з'ясовувати, чи з'являються сторонні корені при піднесенні до квадрата. Підносимо до степеня стільки разів, скільки потрібно для знищення радикалів, і перевіряємо, чи задовольняють корені утвореного рівняння початкове.

Приклад 3. $\sqrt{2x + 15} - \sqrt{x - 1} = 3$.

Розв'язання:

Маємо два радикали, позбутися яких одночасно піднесенням до квадрата неможливо. Тому відокремимо один з радикалів, а потім піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Матимемо:

$(\sqrt{2x + 15})^2 = (3 + \sqrt{x - 1})^2,$

$2x + 15 = 9 + 6\sqrt{x - 1} + x - 1, \;\; x + 7 = 6\sqrt{x - 1},$

$(x + 7)^2 = (6\sqrt{x - 1})^2, \;\; x^2 - 22x + 85 = 0; \quad x_1 = 5, \;\; x_2 = 17$

Перевіримо, чи є числа 5 і 17 коренями вихідного рівняння.

При $x_1 = 5$у лівій частині дістанемо$\sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$. Права частина дорівнює 3, маємо$3 = 3$.

При $x_2 = 17$, у лівій частині дістанемо:$\sqrt{49} - \sqrt{16} = 3, \;\; 3 = 3$

Отже, дане ірраціональне рівняння має два корені: $x_1 = 5$ і $x_2 = 17$.

Розглянемо приклад рівняння з трьома радикалами.

Приклад 4. $2\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 2} = \sqrt{5x - 10}$

Розв'язання:

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$(2\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 2})^2 = (\sqrt{5x - 10})^2,$

$4(x - 1) - 4\sqrt{(x - 1)(x + 2)} + x + 2 = 5x - 10.$

Відокремимо радикал і зведемо подібні:

$4\sqrt{(x - 1)(x + 2)} = 8, \quad \sqrt{(x - 1)(x + 2)} = 2,$

$(\sqrt{(x - 1)(x + 2)})^2 = 2^2; \quad (x - 1)(x + 2) = 4,$

$x^2 + x - 6 = 0, \quad x_1 = -3, \;\; x_2 = 2$

Перевіримо знайдені корені за вихідним рівнянням:

1) $x_1 = -3$, у лівій частині вираз $2\sqrt{-3 - 1} - \sqrt{-3 + 2}$ не має смислу, отже,$x_1 = -3$ – сторонній корінь;
2) $x_2 = 2$, ліва частина $2\sqrt{2 - 1} - \sqrt{2 + 2} = 0$, права частина $\sqrt{5 \cdot 2 - 10} = \sqrt{10 - 10} = 0$.

Отже,$x_2 = 2$– корінь даного ірраціонального рівняння.

Приклад 5. $2\sqrt[3]{2x + x^3 + 15} - x = x + 2.$
Розв'язання:
Відокремимо радикал:
$2\sqrt[3]{2x + x^3 + 15} = 2x + 2; \sqrt[3]{2x + x^3 + 15} = x + 1$
Звільнимося від радикала:
$(\sqrt[3]{2x + x^3 + 15})^3 = (x + 1)^3; \quad 2x + x^3 + 15 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$
$3x^2 + x - 14 = 0, \quad x_1 = -2\frac{1}{3}, \quad x_2 = 2.$
Перевірка.$x_1 = -2\frac{1}{3}$, ліва частина

$$2\sqrt[3]{2 \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) + \left(-2\frac{1}{3}\right)^3 + 15} + 2\frac{1}{3} = 2\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} + 2\frac{1}{3} =$$

$$2\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} + 2\frac{1}{3} = -2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Права частина $-2\frac{1}{3} + 2 = -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, тобто $x_1 = -2\frac{1}{3}$є коренем даного ірраціонального рівняння; $x_2 = 2$, ліва частина
$2\sqrt[3]{4 + 8 + 15} - 2 = 2\sqrt[3]{27} - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4.$
Права частина$2 + 2 = 4$, $4 = 4$, тобто $x_2 = 2$ також задовольняє дане рівняння.
Отже, $x_1 = -2\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$

Приклад 6. $x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21.$
Розв'язання:
Віднімемо від обох частин рівняння по 9: $x^2 - 9 + \sqrt{x^2 - 9} = 12.$
Введемо допоміжне невідоме $\sqrt{x^2 - 9} = y, \quad y \geq 0.$ Маємо: $y^2 + y - 12 = 0,$
$y_1 = -4, \; y_2 = 3.$
Корінь$y_1 = -4$ відкидаємо як сторонній.
Підставляючи друге значення y в рівність $\sqrt{x^2 - 9} = y$, знайдемо $\sqrt{x^2 - 9 = 3}$;
$x^2 - 9 = 9; \quad x = \pm 3\sqrt{2}.$

Приклад 7. $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} - \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 5.$
Розв'язання:
Введемо допоміжне невідоме$y = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$, тоді $x^2 - 3x + 11 = y^2$і
$x^2 - 3x + 3 = y^2 - 8$.
Таким чином, відносно нового невідомого дане рівняннямає вигляд
$2y - \sqrt{y^2 - 8} = 5$. Звільнившись від радикала, дістанемо $3y^2 - 20y + 33 = 0$, звідси
$y_1 = 3, \quad y_2 = \frac{11}{3}$. Обидва корені задовольняють рівняння (перевірте це).
Далі, беручи до уваги, що$x^2 - 3x + 11 = y^2$, дістанемо дварівняння відносно x:
$x^2 - 3x + 11 = 3^2$ і $x^2 - 3x + 11 = \left(\frac{11}{3}\right)^2$, або після спрощень
$x^2 - 3x + 2 = 0$і$x^2 - 3x - \frac{22}{9} = 0.$
Перше рівняння має корені $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$, а друге $x_{3,4} = \frac{9 \pm 13}{6}$.
Усі чотири корені задовольняють початкове рівняння. У цьому можна переконатися, підставивши їхні значення.
$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_{3,4} = \frac{9 \pm 13}{6}.$

Приклад 8. $\sqrt{1,5 - x\sqrt{x^2 - 5,25}} = 2.$

Розв'язання:

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і виконаємо перетворення:

$1,5 - x\sqrt{x^2 - 5,25} = 4,\ \ x\sqrt{x^2 - 5,25} = -2,5,\ \ x^2(x^2 - 5,25)$=6,25,

$x^4 - 5,25x^2 - 6,25 = 0.$

Введемо позначення $x^2 = y$. Маємо: $y^2 - 5,25y - 6,25 = 0;\ \ y_1 = -1;\ \ y_2 = 6,25.$

Але $x^2 \geq 0$, тому $y_1 = -1$відкидаємо. Залишається $x^2 = 6,25$, звідси $x_1 = -2,5; x_2 = 2,5.$ Якщо $x_1 = -2,5$, то $\sqrt{1,5 - x\sqrt{x^2 - 5,25}} = \sqrt{1,5 + 2,5\sqrt{6,25 - 5,25}} = \sqrt{4} = 2.$ Якщо $x = 2,5$, то $\sqrt{1,5 - x\sqrt{x^2 - 5,25}} = \sqrt{1,5 + 2,5\sqrt{6,25 - 5,25}} = \sqrt{-1}$, але такого числа серед дійсних чисел не існує. Отже, дане ірраціональне рівняння має єдиний корінь $x = -2,5$.

Приклад 9. $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x + 13} = 7.$

Розв'язання:

Додаючи до обох частин рівняння по 13, маємо: $(x^2 - x + 13) - \sqrt{x^2 - x + 13} = 20.$

Введемо позначення$\sqrt{x^2 - x + 13} = y$, дістанемо квадратне рівняння відносно *y*:

$y^2 - y - 20 = 0$, корені якого $y_1 = -4$ і $y_2 = 5$. Але $\sqrt{x^2 - x + 13} \geq 0$. Отже, $y_1 = -4$ відкидаємо і беремо $\sqrt{x^2 - x + 13} = 5$. Маємо: $x^2 - x + 13 = 25,\ \ x^2 - x - 12 = 0;$

$x_1 = -3,\ \ x_2 = 4.$

Якщо $x = -3$, то $9 + 3 - \sqrt{9 + 3 + 13} = 12 - 5 = 7.$

Якщо$x = 4$, то $16 - 4 - \sqrt{16 - 4 + 13} = 12 - 5 = 7.$

Отже, дане рівняння має два корені: $x_1 = -3$ і $x_2 = 4$

Приклад 10.Розв'язати рівняння $\sqrt{x + 1} - \sqrt{9 - 2x} = \sqrt{2x - 12}.$

Розв'язання::

Знайдемо область допустимих значень змінної:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ 9 - 2x \geq 0, \\ 2x - 12 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ -2x \geq -9, \\ 2x \geq 12; \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 4,5, \\ x \geq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 6, \\ x \leq 4,5. \end{cases}$$

Оскільки дана система нерівностей не має розв'язків, то область допустимих значень змінної – порожня множина.

*Відповідь:*рівняння розв'язків не має.

Приклад 11.Розв'язати рівняння $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4x - 3} = \sqrt{5x + 4}.$

Розв'язання::

$(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4x - 3})^2 = (\sqrt{5x + 4})^2;$

$3x + 1 + 2\sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} + 4x - 3 = 5x + 4;$

$2\sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 5x + 4 - 3x - 4x + 2;$

$2\sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 6 - 2x;\qquad \sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 3 - x;$

$\left(\sqrt{(3x + 1)(4x - 3)}\right)^2 = (3 - x)^2;\ \ (3x + 1)(4x - 3) = 9 - 6x + x^2;$

$12x^2 - 5x - 3 = 9 - 6x + x^2;\qquad 12x^2 - x^2 - 5x + 6x - 3 - 9 = 0;$

$D = 1 + 528 = 529;$

$x_1 = \frac{-1+23}{22} = \frac{22}{22} = 1;\ \ x_2 = \frac{-1-23}{22} = \frac{-24}{22} = -\frac{12}{11}$

Перевірка

1) $\sqrt{3 \cdot 1 + 1} + \sqrt{4 \cdot 1 - 3} = \sqrt{5 \cdot 1 + 4}$;$\sqrt{4} + \sqrt{1} = \sqrt{9};\quad 2 + 1 = 3;\quad 3 = 3$

2) $\sqrt{3\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)+1}\sqrt{4\left(-\frac{12}{11}\right)-3}=\sqrt{5\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)+4}$

Оскільки вираз $\sqrt{4\cdot\left(-\frac{12}{11}\right)-3}$ не має смислу (підкореневий вираз від'ємний), то $x=-\frac{12}{11}$ не є кореневим рівнянням.

Відповідь: 1.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$.

Розв'язання::

$(\sqrt[3]{(8x+4)}-\sqrt[3]{(8x-4)})^3=2^3;$

$8x+4-3\sqrt[3]{(8x+4)^2}\cdot\sqrt[3]{(8x-4)}+3\sqrt[3]{(8x+4)}\cdot\sqrt[3]{(8x-4)^2}-(8x-4)=8;$

$\cancel{8x}+4-\cancel{8x}+4-3\sqrt[3]{8x+4}\cdot\sqrt[3]{8x-4}(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=8;$

$8-3\sqrt[3]{(8x+4)(8x-4)}\cdot 2=8;-6\sqrt[3]{64x^2-16}=0;\quad 64x^2-16=0;\quad 64x^2=16;$

$x^2=\frac{16}{64}=\frac{1}{4};\quad x_1=\frac{1}{2};\quad x_2=-\frac{1}{2}.$

Відповідь: $-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень I

1. $\sqrt{x+7}=4;$

2. $\sqrt{2x-3}=3;$

3. $\sqrt[4]{x}=2;$

4. $\sqrt[4]{x^2+7}=2;$

5. $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^2-2};$

6. $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x-1};$

7. $\sqrt{2+\sqrt{x-1}}=3;$

8 $\sqrt[3]{11-\sqrt{x+11}}=2;$

9. $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}x;$

10. $\sqrt{23-x}=x-3.$

Рівень II

11. $\sqrt{3x^2+7x-4}=-x;$

12. $\sqrt{x-1+\sqrt{x+15}}=2;$

13. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}=4;$

14. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=1;$

15. $\frac{8}{\sqrt{6-x}}-\sqrt{6-x}=2;$

16. $\sqrt{x-2}=\frac{x}{\sqrt{15-x}};$

17. $\frac{2}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1};$

18. $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}=3\frac{1}{3}$

19. $\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-8=0$

20. $\frac{\sqrt[3]{x}+1}{2}+\frac{9}{\sqrt[3]{x}+2}=4$

Рівень III

21. $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6;$

22. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x};$

23. $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2;$

24. $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12;$

25. $(x^2-4x+3)\sqrt{5x-2-2x^2=0};$

26. $\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2}+\sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2}=x-3;$

27. $\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{x+2}=1;$

28. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11};$

29. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2;$

30. $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x+2}=4.$

Самостійна робота №4

Показникові рівняння

Теоретичні відомості

Показниковими називають рівняння, у яких невідоме міститься в показнику степеня при постійних основах.

1. Найпростіші показникові рівняння

Рівняння виду $a^x = b$, де $a > b$, $b > 0$, $a \neq 1$ називаються *найпростішими показниковими рівняннями*. Для того, щоб його розв'язати, потрібно b подати у вигляді $b = a^c$, тоді будемо мати $a^x = a^c$, звідки $x = c$.

$x = \log_a b$ – розв'язок найпростішого показникового рівняння $a^x = b$, якщо $b \neq a^c$.

Показникові рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, рівносильні рівнянню $f(x) = g(x)$.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $5^{4x} = 7$; **б)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 8$; **в)** $\sqrt[7]{9^{3x-1}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3}}$; **г)** $(6{,}3)^{x^2+2x} = 1$;

д) $9^{8x-3} = 0$; **е)** $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^2$; **є)** $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Розв'язання:

а) $4x = \log_5 7$; $x = \frac{1}{4}\log_5 7$

Відповідь: $\frac{1}{4}\log_5 7$

б) $2^{-(x+1)} = 2^3$; $-(x+1) = 3$; $-x - 1 = 3$; $-x = 4$; $x = -4$

Відповідь: -4

в) $9^{\frac{3x-1}{7}} = 3^{1-\frac{1}{4}}$; $3^{\frac{2(3x-1)}{7}} = 3^{\frac{3}{4}}$; $\frac{2(3x-1)}{7} = \frac{3}{4}$; $8(3x-1) = 21$; $24x - 8 = 21$;

$24x = 29$; $x = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}$.

Відповідь: $1\frac{5}{24}$

г) $(6{,}3)^{x^2+2x} = (6{,}3)^0$;

$x^2 + 2x = 0$ $\qquad$ $x(x+2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x + 2 = 0 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2 \end{array}\right.$

Відповідь: $-2; 0$

д) рівняння розв'язку не має, оскільки показникові функція не може дорівнювати нулю.

е) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$; $x = -2$

Відповідь: -2

є) $(3 \cdot 2)^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$; $3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$; $\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$;

$3^{2x+4-3x} = 2^{x+8-2x-4}$; $3^{4-x} = 2^{4-x}$; $\frac{3^{4-x}}{2^{4-x}} = 1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^0$; $4 - x = 0$; $x = 4$

Відповідь: 4

2. Показникові рівняння, у лівій частині яких є сума степенів з однаковою основою і показниками, які відрізняються на стале число

Рівняння такого виду зводяться до найпростішого винесенням у лівій частині за дужки степеня з певним показником.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2^{x-4} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 704$.

Розв'язання:

$2^{x-7}(2^3 + 2^2 - 1) = 704$; $2^{x-7} \cdot 11 = 704$; $2^{x-7} = 704 : 11$; $2^{x-7} = 64$;
$2^{x-7} = 2^6$; $x - 7 = 6$; $x = 13$

Відповідь: 13

Приклад 2. Розв'язати рівняння $5^{x+2} - 3^{x+2} = 5^{x+1} + 3^{x+1}$.

Розв'язання:

$5^{x+2} - 5^{x+1} = 3^{x+1} + 3^{x+2}$; $5^{x+1}(5-1) = 3^{x+1}(1+3)$; $4 \cdot 5^{x+1} = 3^{x+1}$;
$5^{x+1} = 3^{x+1}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = 1$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$

Відповідь:-1

3. Показникові рівняння, що зводяться до квадратних відносно показникової функції

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Розв'язання:

$2^{2x} + 2^x \cdot 2 - 24 = 0$; Нехай $2^x = t > 0$, тоді $t^2 + 2t - 24 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = -6 < 0 \end{array}\right.$$

Отже, $2^x = 4$, тоді $2^x = 2^2$; $x = 2$

*Відповідь:*2

Приклад 2.Розв'язати рівняння $27^{\frac{2}{x}} - 3^{\frac{3x+3}{x}} + 162 = 0$.

Розв'язання:

$\left(27^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 3^{\frac{3(x+1)}{x}} + 162 = 0$; $\left(27^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 27^{1+\frac{1}{x}} + 162 = 0$;

Нехай $27^{\frac{1}{x}} = t > 0$, тоді $t^2 - 27t + 162 = 0$; $D = 729 - 648 = 81$;

$t_1 = \frac{27+9}{2} = \frac{36}{2} = 18$; $t_2 = \frac{27-9}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$$\left[\begin{array}{l} 27^{\frac{1}{x}} = 18, \\ 27^{\frac{1}{x}} = 9; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} = \log_{27}18, \\ 3^{\frac{3}{x}} = 3^2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 27, \\ x = \frac{3}{2} = 1{,}5 \end{array}\right.$$

*Відповідь:*1,5; $\log_{18} 27$.

4. Однорідні показникові рівняння

Рівняння виду $a_1 \cdot a^{2x} + a_2 \cdot a^x \cdot b^x + a_3 \cdot b^{2x} = 0$*називається однорідним показниковими рівнянням*. Для Розв'язання: такого рівняння треба ліву й праву частини рівняння поділити на a^{2x} або на b^{2x}.

Приклад. Розв'язати рівняння $4^x - 14^x \cdot 2 = 3 \cdot 49^x$.

Розв'язання:

$\frac{4^x}{49^x} - 2 \cdot \frac{14^x}{49^x} = 3$; $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x = 3$. Нехай $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t > 0$, тоді $t^2 - 2t - 3 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -1 < 0, \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$$

Отже, $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3$, тоді $x = \log_{\frac{2}{7}} 3$

Відповідь:$\log_{\frac{2}{7}} 3$

Завдання для самостійного виконання

Рівень І

1. $2^{x-1} = 32$ **2.** $4^{x-2} = 4^{3x}$ **3.** $9^{x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1}$ **4.** $(5^{x-6})^{x-3} = \frac{1}{25}$

5. $3^x \cdot 2^x = \frac{1}{36}$ **6.**$\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{5^x} = 1000$ **7.** $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{19}{9}$ **8.** $7^{x^2+2x-15} = 1$

9. $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ **10.** $3^{4x} \cdot 9^x = 3^{12}$ **11.** $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$

12. $9^{x+1} - 9^x = 24$ **13.** $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86$

Рівень ІІ

14. $5^{x+1} + 5^{x} - 5^{x-1} = 29$ **15.** $7^{3x+2} - 2 \cdot 7^{3x+1} + 5 \cdot 7^{3x} = 280$

16. $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x+5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+5} = 1$ **17.** $\left(\frac{16}{25}\right)^{x} \cdot \left(\frac{125}{64}\right)^{x-1} = \frac{4}{5}$

18. $\sqrt[3]{9^{1-x}} = \sqrt{27^{2-x}}$ **19.** $\sqrt[x]{2^{x^2-0,5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

20. $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x}} + 3 = 0$ **21.** $\frac{5}{3^x-2} - \frac{4}{3^x-1} = 3$

22. $4 \cdot 3^{2x} + 3^{x} \cdot 4^{x} - 3 \cdot 4^{2x} = 0$ **23.** $5^{x+1} = 8^{x+1}$

Рівень ІІІ

24. $4 \cdot 9^{x} - 7 \cdot 12^{x} + 3 \cdot 16^{x} = 0$ **25.** $3^{2x+1} - 2 \cdot 15^{x} - 5^{2x+1} = 0$

26. $7^{x-1} - 5^{x} - 3 \cdot 5^{x-1} + 7^{x} = 0$ **27.** $7^{x} - 2^{x+2} = 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-1}$

28. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x} = 10$ **29.** $8^{-2x^2-5x-1} = 0,25^{3} \cdot \sqrt{4^{2x}}$

30. $5^{2x^2-2x} = 6^{2x^2-2x}$ **31.** $(x-1)^{x^2-9} = 1$

32. $(x-3)^{x^2-3x} = (x-3)^{2x-4}$ **33.** $3^{|x-2|} = 9$

Самостійна робота №5

Показникові нерівності

Теоретичні відомості

Розв'язання: показникових нерівностей ґрунтується на тому, що показникова функція $y = a^{x}$, при $a > 1$ зростає, а при $0 < a < 1$ спадає. Отже, показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна сукупності систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Показникова нерівність $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ рівносильна сукупності систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x) \\ a > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Приклад 1.Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-4} \geq 4^{x+1}$

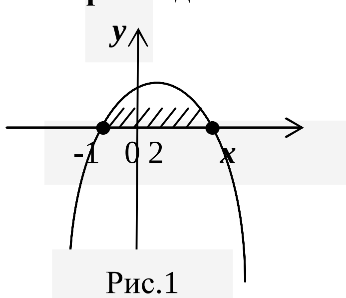


Рис.1

Розв'язання:

$2^{x^2-3x-4} \geq 2^{2(x+1)}$. Оскільки $a = 2 > 1$, то $-(x^2-3x-4) \geq 2(x+1)$;

$-x^2 + 3x + 4 \geq 2x + 2; -x^2 + 3x + 4 \geq 2 - 4; -x^2 + x + 2 \geq 0$.

Розв'яжемо утворену нерівність.

Графіком функції $y = -x^2 + x + 2$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз.

Знайдемо нулі цієї функції: $-x^2 + x + 2 = 0; x^2 - x - 2 = 0$.

$x_1 = 2, x_2 = -1$. Отже, $-x^2 + x + 2 \geq 0$, якщо $x \in [-1; 2]$ (рис.1).

Відповідь: $x \in [-1; 2]$

Приклад 2.Розв'язати нерівність $0,4^{x^3-x^2-20x} < 1$

Розв'язання:

$0,4^{x^3-x^2-20x} < 0,4^{0}$. Оскільки $a = 0,4 < 1$, то $x^3 - x^2 - 20x = 0$.

Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів.

Розглянемо функцію $y = x^3 - x^2 - 20x, D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо нулі цієї функції: $x^3 - x^2 - 20x = 0; x(x^2 - x - 20) = 0$;

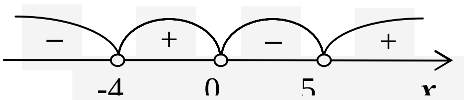


Рис.2

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - 20 = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Нанесемо нулі функції на числову пряму (рис.2). Визначимо знак функції на кожному з утворених проміжків: $y(-5) = \ -5((-5)^2 - (-5) - 20) < 0;$

$$y(-1) = -1((-1)^2 - (-1) - 20) > 0$$

Отже, $x \in (-4; 0) \cup (5; +\infty)$ (рис.2).

Відповідь: $x \in (-4; 0) \cup (5; +\infty)$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $7 \cdot 2^{2x} + 2^{2x+1} \leq 3^{2x+1} + 3^{2x}$

Розв'язання:

$2^{2x}(7 + 2) \leq 3^{2x}(3 + 1); 9 \cdot 2^{2x} \leq 4 \cdot 3^{2x}$. Поділивши ліву і праву частини нерівності на 3^{2x}, матимемо: $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leq 4; \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Оскільки $a = \frac{2}{3} < 1$, то $2x > 2; x \geq 1$.

Відповідь: $x \in [1; +\infty)$

Приклад 4. Розв'язати нерівність $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x - 1 \geq 0$

Розв'язання:

$3^x \cdot 3 + 2 \cdot 3^x - 1 \geq 0$. Нехай $3^{2x} = t > 0$, тоді $\begin{cases} 3t^2 + 2t - 1 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$

Розв'яжемо першу нерівність системи. Графіком функції $y = 3t^2 + 2t - 1$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі функції:

$3t^2 + 2t - 1 = 0; D = 4 + 12 = 16; t_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; t_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$

Отже, $3t^2 + 2t - 1 \geq 0$, якщо $t \in \left(-\infty; -1\right] \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ (рис.3), тоді розв'язком системи $\begin{cases} 3t^2 + 2t - 1 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$ є: $t \in \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$,

тобто $t \geq \frac{1}{3}$ (рис.3).

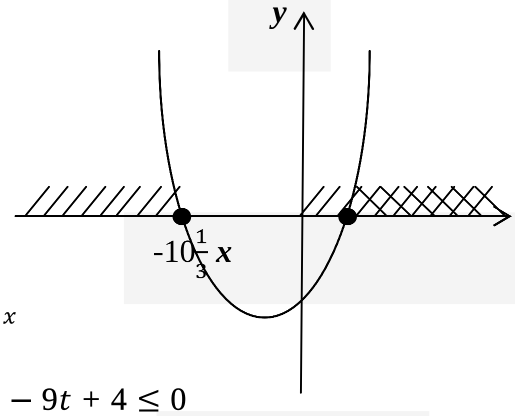


Рис.3

Тоді $3^x \geq \frac{1}{3}; 3^x \geq 3^{-1}; x \geq 1$

Відповідь: $x \in [-1;\ +\infty)$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $2^{2x+1} + 4 \leq 9 \cdot 2^x$

Розв'язання:

$2^x \cdot 2 - 9 \cdot 2^x + 4 \leq 0$. Нехай $2^x = t > 0$, тоді $\begin{cases} 2t^2 - 9t + 4 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases}$

Розв'яжемо першу нерівність системи. Графіком функції $y = 2t^2 - 9t + 4$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі функції:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0; D = 81 - 32 = 49;$$

$$t_1 = \frac{9 + 7}{4} = \frac{16}{4} = 4; t_1 = \frac{9 - 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $2t^2 - 9t + 4 \leq 0$, якщо $t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$

(рис.4), тоді $\begin{cases} 2t^2 - 9t + 4 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases}$, якщо $t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$

(рис.4), тобто $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$. Тоді $\begin{cases} 2^x \leq 4 \\ 2^x \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} 2^x \leq 2^2 \\ 2^x \geq 2^{-1}; \end{cases} \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

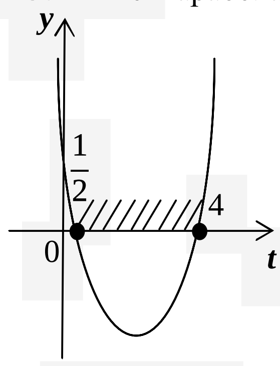


Рис.4

Розв'язками утвореної системи є числа з проміжку $[-1; 2]$ (рис.5).

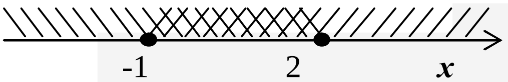


Рис.5

Відповідь: $x \in [-1; 2]$

Приклад 6.Розв'язати нерівність $7 \cdot 4^{x+0,5} + 2 \cdot 2^{2x+1} < 53 \cdot 14^x$

Розв'язання:

$7 \cdot 4^x \cdot 2 + 2 \cdot 7 \cdot 49^x < 53 \cdot 14^x$. Поділивши члени нерівності на 14^x, одержимо:

$$14 \cdot \left(\frac{4}{14}\right)^x + 14 \cdot \left(\frac{49}{14}\right)^x < 53; 14 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x + 14 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x < 53$$

Нехай $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t > 0$, тоді $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$ і $14t + \frac{14}{t} < 53; \frac{14t^2+14}{t} < 53;$

$$14t^2 + 14 < 53t; 14t^2 - 53t + 14 < 0.$$

Розв'яжемо цю нерівність, для чого знайдемо корені тричлена:

$$14t^2 - 53t + 14 = 0; D = 2809 - 784 = 2025;$$

$t_1 = \frac{53+45}{28} = \frac{98}{28} = \frac{7}{2}; t_2 = \frac{53-45}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$

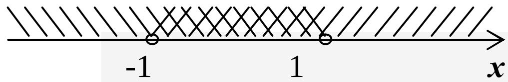


Рис.7

Отже, $14t^2 - 53t + 14 < 0$, якщо $t \in \left(\frac{2}{7}; \frac{7}{2}\right)$ (рис.6).

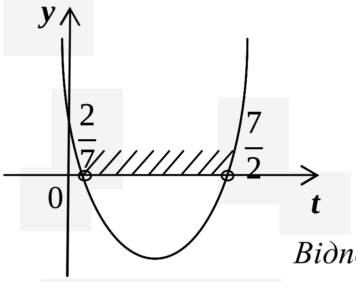


Рис.6

Тоді $\begin{cases} \left(\frac{2}{7}\right)^x < \frac{7}{2} \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x > \frac{2}{7} \end{cases}; \begin{cases} \left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x > \frac{2}{7} \end{cases};$

Оскільки функція $y = \left(\frac{2}{7}\right)^u$ спадає, то $\begin{cases} x > -1 \\ x < 1 \end{cases}$

Розв'язком цієї системи є числа з проміжку $(-1; 1)$ (рис.7).

Відповідь: $x \in (-1; 1)$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати нерівності

Рівень І

1.$0,5^x < 0,25$ **2.**$3^{2x+4} > 9$ **3.**$0,2^x \leq 0,04$

4.$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-6}$ **5.**$5 \leq 5^{1-x} < 125$ **6.**$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+4} \leq 1$

Рівень ІІ

7.$9^{0,5x^2-3} \geq 27$**8.**$\frac{1}{27} < 3^{2-x} \leq 27$ **9.**$0,6^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leq 1$

10.$2^{\frac{x^2-4}{x}} \leq 0,125$ **11.**$4^{x+1} + 4^x \geq 320$ **12.**$7^{x+2} - 14 \cdot 7^x < 5$

13.$4^x \cdot 2^{x^2+1} > 16$ **14.**$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

Рівень ІІІ

15.$9^x - \frac{28}{3^{2x-1}} + \frac{1}{3} > 0$ **16.**$4^{\sqrt{x-2}} + 8 < 9 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

17.$0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0$ **18.**$3^{2x^2-x+2} - 5^{2x^2-x+1} > 5^{2x^2-x+1} + 3^{2x^2-x-1}$

19.$2^{x^2+x+1} - 3^{x^2+x} > 3^{x^2+x-1} - 2^{x^2+x}$ **20.**$2^{2x+1} + 25^{x+0,5} \leq 7 \cdot 10^x$

21.$(2-x)^{x^2-2x+8} \geq 1$ **22.**$(x^2 - x + 1)^{3-x} < 1$

Самостійна робота №6

Розв'язування вправ на знаходження області визначення показникової та логарифмічної функції.

Теоретичні відомості

1. Область визначення показникової функції $y = a^x$ множина всіх дійсних чисел.

2. Щоб знайти область визначення логарифмічної функції, потрібно виключити всі ті значення аргумента, при яких підлогарифмічний вираз приймає від'ємні значення та перетворюється на нуль. Іншими словами, підлогарифмічний вираз має бути строго більше нуля.

Приклади

Знайти область визначення наступних функцій:

1. $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+3}$; **2.** $y = 3^{\sqrt{x-2}}$; **3.** $y = 7^{\frac{1}{x-4}}$; **4.** $y = \lg(x-2)$; **5.** $y = \log_3(x^2 - 9)$;

6. $y = \log_{x-1}(6-x)$; **7.** $y = \dfrac{\ln(3x-2)}{x^2 - x - 2}$; **8.** $y = \lg(6x - x^2) + \dfrac{1}{\lg(3-x)}$

Розв'язання:

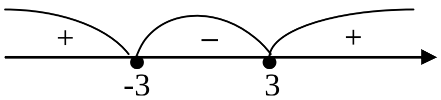
1. Область визначення показникової функції множина всіх дійсних чисел.

2. Область визначення показникової функції множина всіх дійсних чисел, але оскільки показник містить корінь парного степеня, то підкореневий вираз має бути більше, рівно нуля: $x - 2 \geq 0$; $x \geq 2$. Отже, відповідь: $x \in [2;\infty)$.

3. Щоб знайти область визначення показникової функції, у показнику якої є дріб, виключимо ті значення аргументу, при яких значення показника степеня перетворюється на нуль: $x - 4 \neq 0$; $x \neq 4$. Отже, $x \in (-\infty;4) \cup (4;\infty)$.

4. Оскільки вираз під знаком логарифма повинен бути додатним, то $x - 2 > 0$, звідки $x > 2$. Отже, $x \in (2;\infty)$.

5. Логарифмічна функція визначена тільки для додатних значень свого аргументу, тому $x^2 - 9 > 0$. Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів: $(x-3)(x+3) > 0$.

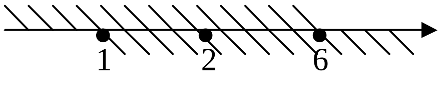


Звідки $x \in (-\infty;-3) \cup (3;\infty)$.

6. Щоб знайти область визначення даної функції потрібно виключити ті значення аргументу, при яких підлогарифмічний вираз приймає від'ємні значення та нуль, а також основа логарифмічної функції буде від'ємною і дорівнюватиме одиниці. Тобто необхідно розв'язати таку систему:

$$\begin{cases} 6 - x > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 6, \\ x > 1, \\ x \neq 2; \end{cases}$$

Покажемо розв'язки цієї системи на числовій прямій:



Отже, як бачимо $x \in (1;2) \cup (2;6)$.

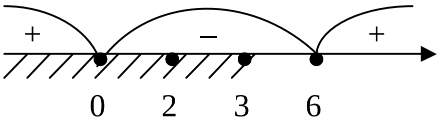
7. Щоб знайти область визначення дробово-логарифмічної функції, потрібно розв'язати таку систему:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \dfrac{2}{3}, \\ x_1 \neq -1, x_2 \neq 2. \end{cases}$$

Отже, як бачимо $x \in \left(\dfrac{2}{3};2\right) \cup (2;\infty)$.

8. Область визначення даної функції – множина розв'язків системи:

$$\begin{cases} 6x - x^2 > 0, \\ 3 - x > 0, \\ \lg(3-x) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(6-x) > 0, \\ x < 3, \\ 3 - x \neq 10^0; \end{cases} \quad \begin{cases} -x(x-6) > 0, \\ x < 3, \\ 3 - x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-6) < 0, \\ x < 3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$



Отже, $x \in (0;2) \cup (2;3)$

Завдання для самостійного виконання

Знайти область визначення наступних функцій:

Рівень I

1. $y = 5^{x-9}$. **2.** $y = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+4}$. **3.** $y = \log_3(x-9)$.

4. $y = \lg(6x+12)$. **5.** $y = \log_2(4-2x)$.

Рівень II

6. $y = 7^{\sqrt{5x-10}}$. **7.** $y = 3^{\frac{1}{x^2-2x-3}}$. **8.** $y = \log_{\frac{1}{2}}(4x - x^2)$.

9. $y = \lg(3x - 2x^2 - x^3)$. **10.** $y = \ln\frac{5x-1}{3x-1}$.

11. $y = \lg(3x-1) + 2\lg(x+1)$. **12.** $y = \log_{x+1}(3-x)$.

Рівень III

13. $y = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{x-2}{4-x}\right)}$. **14.** $y = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{\lg(x+10)^2}$. **15.** $y = \dfrac{\log_7(2x-3)}{x^2-7x+12}$.

16. $y = \lg(20 + x - x^2) + \dfrac{4}{x-2}$. **17.** $y = \sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\lg(x^2+1)}}$. **18.** $y = \lg(9x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(5-x)}$

Самостійна робота №7

Логарифмічні рівняння, нерівності та їх розв'язування

Теоретичні відомості

Логарифмічні рівняння

1. Найпростіші логарифмічні рівняння

Найпростішими логарифмічними рівняннями є рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0, a \neq 1, x > 0$. $x = a^b$ – розв'язок даного рівняння.

Приклади.Розв'язати рівняння:

а)$\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1$; **б)**$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x+10) = -3$;

в)$\log_x 9 = 2$; **г)**$\log_{x-2}(2x^2+x+8) = 2$.

Розв'язання:

а)$2x + 1 > 0; 2x > 1; x > -\frac{1}{2}$ – область допустимих значень змінної x.

$$2x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}; 2x+1=3; 2x=3-1; 2x=2; x=1>-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 1.

б) $x^2+3x+10>0$. Графіком функції $y=x^2+3x+10$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

$x^2+3x+10=0; D=3^2-4\cdot1\cdot10=9-40<0$. Отже, $x^2+3x+10>0$ при будь-якому x. Тоді $x^2+3x+10=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}; x^2+3x+10=8; x^2+3x+2=0; x_1=-2; x_2=-1$

Відповідь: -2; 1.

в) ОДЗ: $x>0, x\neq 1. 9=x^2; x_1=-3<0; x_2=3.$

Відповідь: 3.

г) ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ 2x^2+x+8>0; \end{cases} \begin{cases} x>2, \\ x\neq 3, \\ x - \text{будь}-\text{яке}; \end{cases}$

ОДЗ: $x\in(2;3)\cup(3;+\infty)$.

$2x^2+x+8=(x-2)^2; 2x^2+x+8=x^2-4x+4; x^2+5x+4=0; x_1=-4; x_2=-1$

Оскільки дані кореня не потрапляють в ОДЗ, то рівняння розв'язків не має.

Відповідь: рівняння коренів не має.

2. Рівняння, які розв'язуються за допомогою властивостей логарифма і потенціюванням

$$\log_a f(x)=\log_a g(x), a>0, a\neq 1.$$

Дане рівняння еквівалентне системі:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Приклад 1.Розв'язати рівняння $\log_2(x-1)+\log_2(3x-2)=2$.

Розв'язання:

$$\log_2(x-1)(3x-2)=2;$$

$$\begin{cases} (x-1)(3x-2)=4, \\ x-1>0, \\ 3x-2>0; \end{cases} \begin{cases} 3x^2-5x+2-4=0, \\ x>1, \\ x>\frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} 3x^2-5x-2=0, \\ x>1; \end{cases}$$

$$D=25+24=49; x_1=\frac{5+7}{6}=2; x_2=\frac{5-7}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}<1.$$

Відповідь: 2.

Приклад 2.Розв'язати рівняння $\lg 2+\frac{1}{2}\lg(x-4)=\lg\sqrt{x+5}$.

Розв'язання:

$$\lg 2+\lg\sqrt{x-4}=\lg\sqrt{x+5}; \lg 2\sqrt{x-4}=\lg\sqrt{x+5};$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-4=\lg\sqrt{x+5}}, \\ x-4>0, \\ x+5>0; \end{cases} \begin{cases} 4(x-4)=x+5, \\ x>4; \end{cases} \begin{cases} 4x-16=x+5, \\ x>4; \end{cases} \begin{cases} 3x=21, \\ x>4; \end{cases} \begin{cases} x=7, \\ x>4. \end{cases}$$

Відповідь: 7.

3. Логарифмічні рівняння, які розв'язуються методом заміни змінної

Приклад.Розв'язати рівняння $2\log_3^2 x+3\log_3\frac{1}{x}-2=0$.

Розв’язання:

ОДЗ: $x > 0.2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 2 = 0$. Нехай $\log_3 x = t$, тоді $2t^2 - 3t - 2 = 0$;

$$D = 9 + 16 = 25; t_1 = \frac{3+5}{4} = 2; t_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2,\\ \log_3 x = -\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = 3^2,\\ x = 3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{array}\right.$$

Відповідь:$\frac{1}{\sqrt{3}}$; 9.

4.Логарифмічні рівняння, які розв’язуються за допомогою формули переходу до нової основи

Приклад.Розв’язати рівняння $3\log_3(4x-1) + \log_{(4x-1)}3 = 4$.

Розв’язання:

$\log_{(4x-1)}3 = \frac{1}{\log_3(4x-1)}$. Нехай $\log_3(4x-1) = t$, тоді $3t + \frac{1}{t} = 4; \frac{3t^2+1}{t} = 4$;

$$\begin{cases} 3t^2 + 1 = 4t,\\ t \neq 0; \end{cases}$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0; D = 16 - 12 = 4. t_1 = \frac{4+2}{6} = 1; t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Отже, $\frac{2t^2-5t+2}{2t} \leq 0$, якщо $t \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2};\ 2\right]$, тобто

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l}\log_3 x < 0,\\ \dfrac{1}{2} \leq \log_3 x \leq 2,\end{array}\right.\\ x > 0,\\ x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l}\log_3 x < \log_3 1,\\ \log_3\sqrt{3} \leq \log_3 x \leq \log_3 9,\end{array}\right.\\ x > 0,\\ x \neq 1. \end{cases}$$

Оскільки функція $y = \log_3 u$ зростає, то $\begin{cases} \left[\begin{array}{l}x < 1,\\ \sqrt{3} \leq x \leq 9,\end{array}\right.\\ x > 0,\\ x \neq 1. \end{cases}$

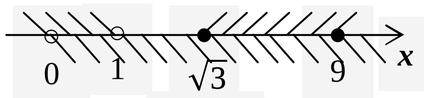


Рис.1

Тоді маємо $x \in (0; 1) \cup \left[\sqrt{3}; 9\right]$ (рис.1).

Відповідь: $x \in (0; 1) \cup \left[\sqrt{3}; 9\right]$.

Логарифмічні нерівності

Розв’язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на тому, що функція $y = \log_a x$, при $a > 1$ зростає, а при $0 < a < 1$ – спадає.

Логарифмічна нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0,\\ g(x) > 0,\\ f(x) > g(x),\\ a > 1; \end{cases}\\ \begin{cases} f(x) > 0,\\ g(x) > 0,\\ f(x) < g(x),\\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Логарифмічна нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ a > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases}\end{array}\right.$$

Приклад 1.Розв’язати нерівність $\log_{0,5}(x^2 + 3x) \geq -2$.

Розв’язання:

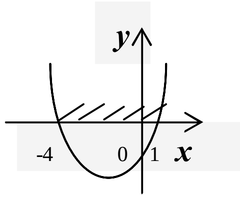


Рис.2

Оскільки $-2 = -2 \cdot 1 = -2 \cdot \log_{0,5}0,5 = \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{0,5}4$, то

$$\log_{0,5}(x^2 + 3x) \geq \log_{0,5}4.$$

Оскільки функція $y = \log_{0,5}t$ спадає, то $\begin{cases} x^2 + 3x \leq 4, \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \leq 0, \\ x^2 + 3x > 0. \end{cases}$

Розв’яжемо нерівності системи.

Графіками функції $y = x^2 + 3x - 4$ і $y = x^2 + 3x$ є параболи, вітки яких напрямлені вгору. Знайдемо нулі першої функції:

$x^2 + 3x - 4 = 0; \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1. \end{array}\right.$

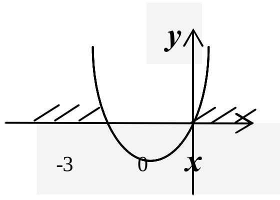


Рис.3

Отже, $x^2 + 3x - 4 \leq 0$, якщо $x \in [-4; 1]$ (рис.2).

Знайдемо нулі функції $y = x^2 + 3x$:

$$x^2 + 3x = 0; x(x + 3) = 0; \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Отже, $x^2 + 3x > 0$, якщо $x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$ (рис.3).

Спільними розв’язками системи $\begin{cases} x \in [-4; 1], \\ x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty); \end{cases}$

є числа $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$ (рис.4).

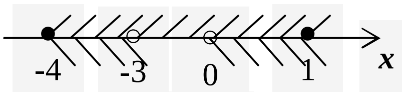


Рис.4

Відповідь: $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$

Приклад 2.Розв’язати нерівність $\log_3^2 x + 5\log_3 x + 4 \geq 0$.

Розв’язання:

ОДЗ: : $x \in (0; +\infty)$.Нехай $\log_3 x = t$, тоді $t^2 + 5t + 4 \geq 0$. Розв’яжемо цю нерівність.

Графіком функції $y = t^2 + 5t + 4$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі даної функції: $t^2 + 5t + 4 = 0; t_1 = -1; t_2 = -4$.

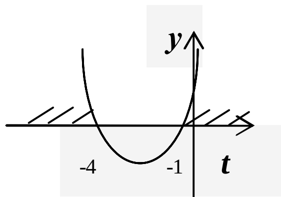


Рис.5

Отже, $t^2 + 5t + 4 \geq 0$, якщо $t \in (1-; -4] \cup [-1; +\infty)$ (рис.5), тобто

$$\left[\begin{array}{l} t \leq -4, \\ t \geq -1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \log_3 x \leq -4, \\ \log_3 x \geq -1. \end{array}\right.$$

Оскільки $-4 = -4 \cdot 1 = -4 \cdot \log_3 3 = \log_3 3^{-4} = \log_3 \frac{1}{81}$;

$-1 = -1 \cdot 1 = -1 \cdot \log_3 3 = \log_3 3^{-1} = \log_3 \frac{1}{3}$, то маємо $\left[\begin{array}{l} \log_3 x \leq \log_3 \frac{1}{81}, \\ \log_3 x \geq \log_3 \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Оскільки функція $y = \log_3 u$ зростає, то

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq \dfrac{1}{81}, \\ x \geq \dfrac{1}{3}, \end{array}\right. \\ x > 0. \end{cases}$$

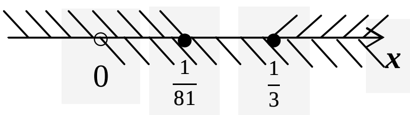


Рис.6

Отже, $x \in \left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$ (рис.6).

Відповідь: $x \in \left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Приклад 3.Розв'язати нерівність $\log_{(1+x)}(x^2-6x-7) < 1$.

Розв'язання:

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-6x-7>0,\\ 1+x>0,\\ 1+x\neq 1; \end{cases} \begin{cases} x^2-6x-7>0,\\ x>-1,\\ x\neq 0. \end{cases}$

Розв'яжемо нерівність $x^2-6x-7>0$.

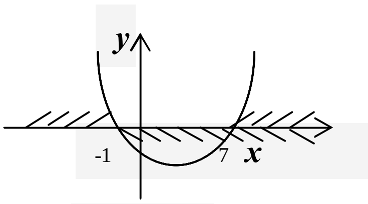


Рис.7

Графіком функції $y = x^2-6x-7$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі цієї функції: $x^2-6x-7=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 7,\\ x_2 = -1; \end{array}\right.$$

Отже, $x^2-6x-7>0$, якщо $x \in (-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$ (рис.7), тоді розв'язком системи $\begin{cases} x^2-6x-7>0,\\ x>-1,\\ x\neq 0, \end{cases}$ є $x \in (7;+\infty)$.

Отже, ОДЗ: $x \in (7;+\infty)$. $\log_{(1+x)}(x^2-6x-7) < \log_{(1+x)}(1+x)$.

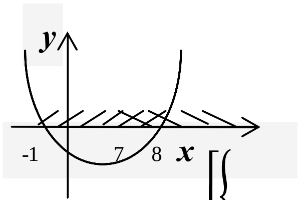


Рис.8

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+x>1,\\ x>7,\\ x^2-6x-7<1+x; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<1+x<1,\\ x^2-6x-7>1+x,\\ x>7; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0,\\ x>7,\\ x^2-7x-8<0; \end{cases}\\ \begin{cases} 0<1+x<1,\\ x>7,\\ x^2-7x-8>0; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>7,\\ x^2-7x-8<0; \end{cases}\\ \begin{cases} -1<x<0,\\ x>7,\\ x^2-7x-8>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Друга система сукупності розв'язків не має, оскільки неможливо, щоб одночасно виконувалися умови $x>7$ і $-1<x<0$. Розв'яжемо першу систему сукупності. Графіком функції $y = x^2-7x-8$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо нулі цієї функції: $x^2-7x-8=0; x_1 = 8, x_2 = -1$.

Отже, $x^2-7x-8<0, x \in (1;\ 8)$ (рис.7). Враховуючи, що $x>7$ (рис.), маємо $x \in (7;\ 8)$.

Відповідь:$x \in (7;\ 8)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_x 3 + \log_3 x \leq \frac{5}{2}$.

Розв'язання:

ОДЗ: $x \in (0;1)\cup(1;+\infty)$.

$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x \leq \frac{5}{2}$. Нехай $\log_3 x = t$, тоді $\frac{1}{t} + t \leq \frac{5}{2}; \frac{t^2+1}{t} \leq \frac{5}{2}; \frac{t^2+1}{t} - \frac{5}{2} \leq 0;$

$$\frac{2(t^2+1)-5t}{2t} \leq 0; \frac{2t^2-5t+2}{2t} \leq 0.$$

Розв'яжемо утворену нерівність методом інтервалів, для чого знайдемо нулі функції

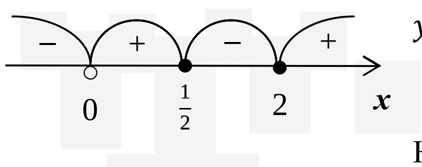


Рис.8

$y = \frac{2t^2-5t+2}{2t}$; $\frac{2t^2-5t+2}{2t} = 0$; $\begin{cases} 2t^2-5t+2=0,\\ t\neq 0; \end{cases}$ $D = 25-16 = 9$.

$$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2; t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Нанесемо на числову пряму нулі функції та область її визначення й визначимо знаки функції на утворюваних проміжках (рис.8).

Отже, $\frac{2t^2-5t+2}{2t} \leq 0$, якщо $t \in (-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{2};2\right]$, тобто

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x < 0,\\ \frac{1}{2} \leq \log_3 x \leq 2, \end{array}\right.\\ x>0,\\ x\neq 1; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x < \log_3 1,\\ \log_3\sqrt{3} \leq \log_3 x \leq \log_3 9, \end{array}\right.\\ x>0,\\ x\neq 1. \end{cases}$$

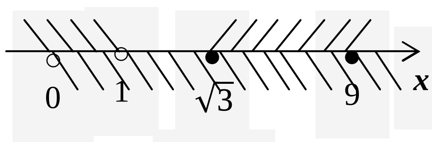


Рис.9

Оскільки функція $y = \log_3 u$ зростає, то $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ \sqrt{3} \le x \le 9, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \ne 1. \end{cases}$

Тоді маємо $x \in (0;1) \cup [\sqrt{3};9]$ (рис.9).

Відповідь: $x \in (0;1) \cup [\sqrt{3};9]$.

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати рівняння:

Рівень I

1.1. $\log_2(4-x)=0.$ **1.2.** $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=-2.$ **1.3.** $\lg(x^2+3x+4)=\lg 4.$

1.4. $\log_5(4+x)=\log_5(1-2x).$ **1.5.** $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0.$ **1.6.** $\log_{x+1} 2=1.$

Рівень II

1.7. $\log_{2x}(x^2+x-2)=1.$ **1.8.** $\log_5^2 x-0{,}5\log_5 x^2=6.$

1.9. $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x).$ **1.10.** $\dfrac{3-\log_2(3x-1)}{\log_2(x-2)}=1.$

1.11. $\log_5^2(x-2)-2\log_5(x-2)-3=0.$ **1.12.** $\log_4(x+2)+\log_4(x+3)=\log_4 3+0{,}5.$

1.13. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x+3}.$ **1.14.** $\dfrac{1}{\lg x-6}+\dfrac{5}{\lg x+2}=1.$

1.15. $x^{\lg x-2}=1000.$ **1.16.** $\log_2\dfrac{x-2}{x+3}=1-\log_2\dfrac{x-3}{x+4}.$

Рівень III

1.17. $25^{\lg x}=5+4x^{\lg 5}.$ **1.18.** $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$

1.19. $\log_5(5^x-4)=1-x.$ **1.20.** $6^{\log_{\sqrt{3}} x}-7\cdot 6^{\log_3 x}+6=0.$

1.21. $\lg^2 100x-7\lg x=8.$ **1.22.** $\log_4 x+\log_{\frac{1}{16}} x+\log_8 x^2=5.$

1.23. $2^{\log_2(x^2+5x-6)}=4x.$ **1.24.** $\dfrac{\sqrt{5-\lg^2 x}}{1+\lg x}=1.$

Розв'язати нерівності:

Рівень I

2.1. $\log_5 9>\log_5 x.$ **2.2.** $\lg(x-3)>3.$ **2.3.** $\log_{0,8}(x+6)<\log_{0,8} 9.$

2.4. $\log_3(x-2)<2.$ **2.5.** $\log_5 x\le 3.$ **2.6.** $\log_2 x\ge 3.$

2.7. $\log_{\frac{1}{2}} x\ge\log_{\frac{1}{2}} 3.$ **2.8.** $\log_3(x+1)\ge\log_3(3-x).$

Рівень II

2.9. $\log_4(x^2-3x)\le 1.$ **2.10.** $\log_3(x-2)+\log_3 x\ge 1.$

2.11. $\log_{\frac{1}{2}}\log 2\log_9(x-1)>0.$ **2.12.** $\log_5^2 x-\log_5 x>2.$

2.13. $\log_{0,5}(2x-4) < \log_{0,5}(x+1.)$

2.14. $\log_{0,1}(x^2-x-2) \ge \log_{0,1}(10-2x).$

Рівень III

2.15. $2\log_{0,4}(-x) > \log_{0,4}(10-9x).$

2.16. $\log_3(2x-1)+\log_3(x-9) \le 2.$

2.17. $\log_x(4x-3) \le 2.$

2.18. $\log_{x-3}(x^2-4x+3) < 0.$

2.19. $\log^2_{\frac{1}{3}} 3x + \log\dfrac{x^2}{9} \ge 4.$

2.20. $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > -1.$

Самостійна робота №8

Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Теоретичні відомості

1. Означення тригонометричних функцій

Через прямокутний трикутник (рис..1):

$\sin\propto = \dfrac{a}{c}; \cos\propto = \dfrac{b}{c}; \mathrm{tg}\ \propto = \dfrac{a}{b}; \mathrm{ctg}\ \propto = \dfrac{b}{a};$

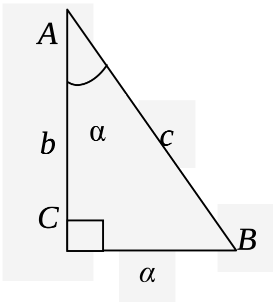


Рис..1

$\mathrm{tg}\ \propto = \dfrac{\sin\propto}{\cos\propto}; \mathrm{ctg}\ \propto = \dfrac{\cos\propto}{\sin\propto}$

Через одиничне коло (рис..2):

$\sin\propto = y$– ордината точки $P_\propto$;

$\cos\propto = x$ – абсциса точки $P_\propto$;

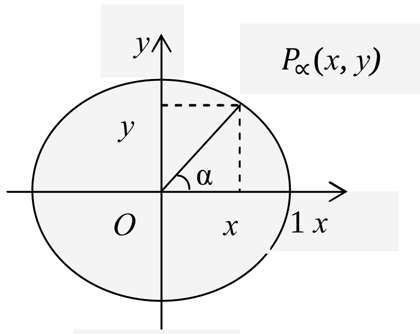


Рис.2

AB – вісь тангенсів, $AB \parallel Oy$ (рис..3):

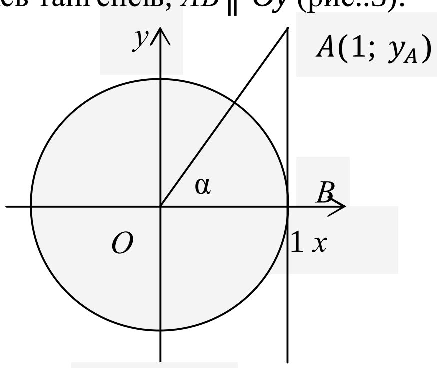


Рис.3

$\mathrm{tg}\ \propto = Y_A$ – ордината відповідної точки осі тангенсів.

BC – вісь котангенсів, $BC \parallel Ox$ (рис..4)

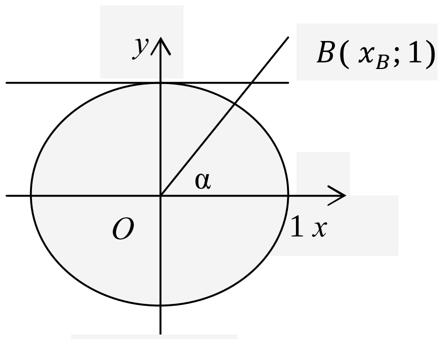


Рис.4

$\mathrm{ctg}\ \propto = X_B$ – абсциса відповідної точки осі котангенсів.

2. Знаки тригонометричних функцій

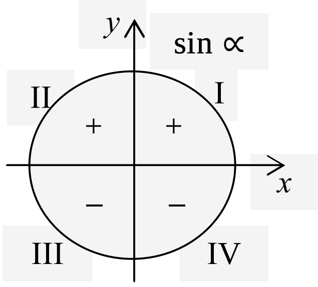


Рис.5

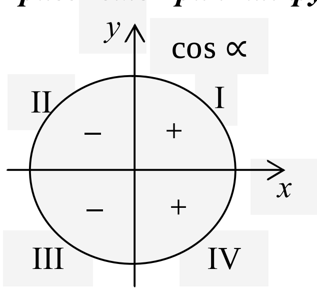


Рис.6

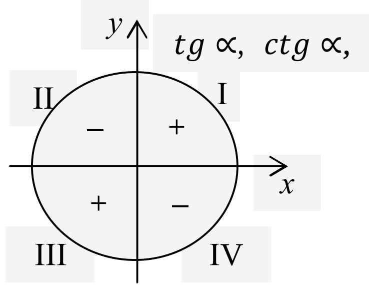


Рис.7

3. Періодичність і парність тригонометричних функцій

Парність (непарність) тригонометричних функцій:

функція $\cos\propto$ – парна: $\cos(-\propto) = \cos\propto$; функції $\sin\propto, \mathrm{tg}\propto, \mathrm{ctg}\propto$, – непарні: $\sin(-\propto) = -\sin\propto$; $\mathrm{tg}(-\propto) = -\mathrm{tg}\propto; \mathrm{ctg}(-\propto) = -\mathrm{ctg}\propto$.

Періодичність тригонометричних функцій:

функції $\sin\propto, \cos\propto$ мають період $2\pi k,\ k \in Z$; найменший додатний період – 2π:

$\sin(\propto + 2\pi k) = \sin\propto$; $\cos(\propto + 2\pi k) = \cos\propto,\ \ k \in Z$; функції $\mathrm{tg}\propto$, $\mathrm{ctg}\propto$ мають період $\pi k,\ k \in Z$; найменший додатний період –π: $\mathrm{tg}(\propto + \pi k) = \mathrm{tg}\propto, \mathrm{ctg}(\propto + \pi k) = \mathrm{ctg}\propto,\ k \in Z.$

4. Формули зведення

Співвідношення, у яких значення тригонометричних функцій аргументів $\frac{\pi}{2} \pm \propto; \pi \pm \propto; \frac{3\pi}{2} \pm \propto; 2\pi \pm \propto$ виражаються через $\sin\propto, \cos\propto, \mathrm{tg}\propto, \mathrm{ctg}\propto$, називаються *формулами зведення.*

Щоб записати будь-яку формулу зведення, коли $0 < \propto < \frac{\pi}{2}$, корисно запам'ятати такі правила:

1) якщо $\frac{\pi}{2}$ взято парну кількість разів, то назва даної функції не змінюється; якщо $\frac{\pi}{2}$ взято непарну кількість разів, то назва даної функції змінюється на кофункцію (синус на косинус, тангенс на котангенс і навпаки

2) перед утвореною функцією ставиться той знак, який має функція, що перетворюється за формулою зведення.

Наприклад:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \propto\right) = \cos\propto;\quad \sin(\pi + \propto) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + \propto\right) = -\sin\propto; \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \propto\right) = -\sin\propto;$$

$$\mathrm{tg}(\pi - \propto) = -\mathrm{tg}\propto; \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \propto\right) = \mathrm{tg}\propto; \sin(\propto - \pi) = \sin\big(-(\pi - \propto)\big) = -\sin(\pi - \propto) = -\sin\propto;$$

$$\cos\left(\propto - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \propto\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \propto\right) = \sin\propto.$$

5. Основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2\propto + \cos^2\propto = 1;\quad \sin^2\propto = 1 - \cos^2\propto;\quad \cos^2\propto = 1 - \sin^2\propto;$$

$$\mathrm{tg}\propto = \frac{\sin\propto}{\cos\propto};\quad \mathrm{ctg}\propto = \frac{\cos\propto}{\sin\propto};\quad \mathrm{tg}\propto\cdot\mathrm{ctg}\propto = 1;\quad \mathrm{tg}\propto = \frac{1}{\mathrm{ctg}\propto};\quad \mathrm{ctg}\propto = \frac{1}{\mathrm{tg}\propto};$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\propto = \frac{1}{\cos^2\propto} = \sec^2\propto;\qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\propto = \frac{1}{\sin^2\propto} = \mathrm{cosec}^2\propto$$

6. Формули додавання

$$\sin(\propto + \beta) = \sin\propto\cos\beta + \cos\propto\sin\beta;$$

$$\sin(\propto - \beta) = \sin\propto\cos\beta - \cos\propto\sin\beta;$$

$$\cos(\propto + \beta) = \cos\propto\cos\beta - \sin\propto\sin\beta;$$

$$\cos(\propto - \beta) = \cos\propto\cos\beta + \sin\propto\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\propto + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\propto + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\propto\cdot\mathrm{tg}\,\beta};\ \mathrm{tg}(\propto - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\propto - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\propto\cdot\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\propto + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\propto\cdot\mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\propto + \mathrm{ctg}\,\beta};\ \mathrm{ctg}(\propto - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\propto\cdot\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\propto}.$$

7. Тригонометричні функції подвійного аргументу

$$\sin\propto\ = 2\sin\propto\cos\propto;\ \cos 2\propto\ = \cos^2\propto - \sin^2\propto = 2\cos^2\propto - 1 = 1 - 2\sin^2\propto;$$

$$\mathrm{tg}\,2\propto = \frac{2\mathrm{tg}\propto}{1 - \mathrm{tg}^2\propto};\ \mathrm{ctg}\,2\propto = \frac{\mathrm{ctg}^2\propto - 1}{2\mathrm{ctg}\propto}.$$

8. Формули зниження степеня

$$\sin^2\propto = \frac{1 - \cos 2\propto}{2};\ \cos^2\propto = \frac{1 + \cos 2\propto}{2}$$

Використовуючи формули зниження степеня, можна здійснювати перетворення даних тригонометричних виразів:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos\propto}{2};\ \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos\propto}{2};\ 1 - \cos 2\propto\ = 2\sin^2 x;\ 1 + \cos 2\propto\ = 2\cos^2 x;$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2};\ 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2};\ 1 - \cos 5x = 2\sin^2\frac{5x}{2};\ 1 + \cos 5x = 2\frac{5x}{2};$$

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

9. Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій на добуток

$$\sin\propto + \sin\beta = 2\sin\frac{\propto + \beta}{2}\cos\frac{\propto - \beta}{2};$$

$$\cos\propto + \cos\beta = 2\cos\frac{\propto + \beta}{2}\cos\frac{\propto - \beta}{2};\ \cos\propto - \cos\beta = -2\sin\frac{\propto + \beta}{2}\sin\frac{\propto - \beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\propto + \beta}{2}\sin\frac{\beta - \propto}{2};$$

$$\mathrm{tg}\propto + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\propto - \beta)}{\cos\propto\cdot\cos\beta};\ \mathrm{tg}\propto - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\propto - \beta)}{\cos\propto\cdot\cos\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\propto + \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\propto + \beta)}{\sin\propto\cdot\sin\beta};\ \mathrm{ctg}\propto - \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta - \propto)}{\sin\propto\cdot\sin\beta}.$$

10. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму

$$\sin\propto\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\propto - \beta) - \cos(\propto + \beta)\big);$$

$$\cos\propto\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\propto - \beta) + \cos(\propto + \beta)\big);$$

$$\sin\propto\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\propto - \beta) + \sin(\propto + \beta)\big)$$

11. Формули половинного аргументу

$$\sin\frac{\propto}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\propto}{2}};\ \cos\frac{\propto}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\propto}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\propto}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\propto}{1 + \cos\propto}} = \frac{1 - \cos\propto}{\sin\propto} = \frac{\sin\propto}{1 + \cos\propto};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\propto}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\propto}{1+\cos\propto}} = \frac{1-\cos\propto}{\sin\propto} = \frac{\sin\propto}{1+\cos\propto};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\propto}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\propto}{1-\cos\propto}} = \frac{\sin\propto}{1-\cos\propto} = \frac{1+\cos\propto}{\sin\propto}.$$

12. Співвідношення між $\boldsymbol{\sin\propto, \cos\propto, tg\frac{\propto}{2}}$

$$\sin\propto = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\propto}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\propto}{2}};\cos\propto = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\propto}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\propto}{2}};\propto\neq\pi+2\pi k,\qquad k\in Z$$

Приклад 1. Обчислити значення виразу:

а)$\sin 780^o$ **б)**$\cos\frac{13\pi}{6}$ **в)**$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$ **г)**$\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ **д)**$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$

е)$\lg\ \mathrm{tg}\,5^o + \lg\ \mathrm{tg}\,7^o + \lg\ \mathrm{tg}\,85^o + \lg\ \mathrm{tg}\,83^o$

Розв'язання:

а) $\sin 780^o = \sin(360^o\cdot 2 + 60^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.*Відповідь:*$\frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\frac{12\pi+\pi}{6} = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.*Відповідь:*$\frac{\sqrt{3}}{2}$

в)$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right) = -\sin\frac{35\pi}{4} = -\sin\frac{35\pi-\pi}{4} = -\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(18\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

г)$\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{4} = -\mathrm{ctg}\frac{8\pi-\pi}{4} = -\mathrm{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = 1.$

Відповідь: 1.

д)$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{5\pi-\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\cancel{\sin\frac{\pi}{5}}}{4\cancel{\sin\frac{\pi}{5}}} = \frac{1}{4}$

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

е) $\lg\ \mathrm{tg}\,5^o + \lg\ \mathrm{tg}\,7^o + \lg\ \mathrm{tg}\,85^o + \lg\ \mathrm{tg}\,83^o = (\lg\ \mathrm{tg}\,5^o + \lg\ \mathrm{tg}\,85^o) + (\lg\ \mathrm{tg}\,7^o + \lg\ \mathrm{tg}\,83^o) =$
$= \lg(\mathrm{tg}\,5^o\cdot\mathrm{tg}\,85^o) + \lg(\mathrm{tg}\,7^o\cdot\mathrm{tg}\,83^o) = \lg\left(\mathrm{tg}\,5^o\cdot\mathrm{tg}(90^o-5^o)\right) + \lg\left(\mathrm{tg}\,7^o\cdot\mathrm{tg}(90^o-7^o)\right)$
$=$

$$= \lg(\mathrm{tg}\,5^o\cdot\mathrm{ctg}\,5^o) + \lg(\mathrm{tg}\,7^o\cdot\mathrm{ctg}\,7^o) = \lg 1 + \lg 1 = 0 + 0 = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 2.Знайти $\cos\propto, \mathrm{tg}\ \propto, \sec\propto, \mathrm{cosec}\propto$, якщо $\sin\propto = -\frac{4}{5}, \pi<\propto<\frac{3\pi}{2}$

Розв'язання:

Оскільки $\cos^2\propto = 1-\sin^2\propto$, то $\cos\propto = \pm\sqrt{1-\sin^2\propto} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} =$

$$= \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

Оскільки кут α лежить у ІІІ координатній чверті, то $\cos\propto < 0$.

Отже, $\cos\propto = -\frac{3}{5}$. $\mathrm{tg}\ \propto = \frac{\sin\propto}{\cos\propto} = -\frac{4}{5}:\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4\cdot5}{5\cdot3} = \frac{4}{3}$; $\mathrm{ctg}\ \propto = \frac{1}{\mathrm{tg}\propto} = \frac{3}{4}$;

$$\sec\propto = \frac{1}{\cos\propto} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}; \operatorname{cosec}\propto = \frac{1}{\sin\propto} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}.$$

Відповідь:$-\frac{3}{5};\ \frac{4}{3};\ \frac{3}{4};\ -\frac{5}{3};\ -\frac{5}{4}.$

Приклад 3. $\operatorname{ctg}\propto = -\frac{7}{24}$, $270^{o} < \propto < 360^{o}$. Обчислити значення решти тригонометричних функцій.

Розв'язання:

Оскільки $1+\operatorname{ctg}^2\propto = \frac{1}{\sin^2\propto}$, то $\sin^2\propto = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\propto}$; $\sin^2\propto = \frac{1}{1+\left(-\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{49}{576}} = \frac{1}{\frac{625}{576}} = \frac{576}{625}$;

$$\sin\propto = \pm\sqrt{\frac{576}{625}} = \pm\frac{24}{25}.$$

Оскільки кут α лежить у IV координатній чверті, то $\sin\propto < 0$.

Отже, $\sin\propto = -\frac{24}{25}$. $\operatorname{ctg}\propto = \frac{\cos\propto}{\sin\propto}$; $\cos\propto = \operatorname{ctg}\propto\cdot\sin\propto = -\frac{7}{24}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{25}$;

$$\operatorname{tg}\propto = \frac{1}{\operatorname{ctg}\propto} - \frac{1}{-\frac{7}{24}} = -\frac{24}{7}.$$

Відповідь: $-\frac{24}{25};\ \frac{7}{25};\ -\frac{24}{7}.$

Приклад 4. Спростити вираз:

а)$\left(\frac{\sin\propto+\sin 3\propto}{\cos\propto+\cos 3\propto}\right)(1+\cos 4\propto)$ **б)**$2\cos^2\left(\frac{\propto}{2}-\frac{3}{2}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\propto\right)-1$

в)$\sqrt{(\operatorname{ctg}\propto-\operatorname{tg}\propto)\cdot 2\operatorname{ctg}2\propto}\cdot\operatorname{tg}2\propto+2$, якщо $\frac{\pi}{2} < \propto < \frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання:

а) $\left(\frac{\sin\propto+\sin 3\propto}{\cos\propto+\cos 3\propto}\right)(1+\cos 4\propto) = \frac{2\sin 2\propto\cos\propto}{2\cos 2\propto\cos\propto}\cdot 2\cos^2 2\propto = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sin 2\propto\cdot\overset{1}{\cancel{\cos\propto}}\cdot\overset{\cos 2\propto}{\cancel{\cos^2 2\propto}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{\cos 2\propto}}\cdot\underset{1}{\cancel{\cos\propto}}} =$

$$= 2\sin 2\propto\cos 2\propto = \sin 4\propto.$$

Відповідь:$\sin 4\propto$.

б) $2\cos^2\left(\frac{\propto}{2}-\frac{3}{2}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\propto\right)-1 = 2\sin^2\frac{\propto}{2}+\sqrt{3}\sin\propto-1 =$

$$= 1-\cos\propto+\sqrt{3}\sin\propto-1 = -\cos\propto+\sqrt{3}\sin\propto = -2\left(\frac{1}{2}\cos\propto-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\propto\right) =$$

$$= -2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\propto-\cos\propto\frac{\pi}{6}\sin\propto\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\propto\right) = 2\sin\left(\propto-\frac{\pi}{6}\right).$$

Відповідь: $2\sin\left(\propto-\frac{\pi}{6}\right)$.

в) $\sqrt{(\operatorname{ctg}\propto-\operatorname{tg}\propto)\cdot 2\operatorname{ctg}2\propto}\cdot\operatorname{tg}2\propto+2 = \sqrt{\left(\frac{\cos\propto}{\sin\propto}-\frac{\sin\propto}{\cos\propto}\right)\cdot 2\frac{\cos 2\propto}{\sin 2\propto}}\cdot\frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto}+2 =$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\propto-\sin^2\propto}{\sin\propto\cos\propto}\cdot 2\frac{\cos 2\propto}{\sin 2\propto}}\cdot\frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto}+2 = \sqrt{\frac{2\cos 2\propto\cdot 2\cos 2\propto}{\sin 2\propto\cdot\sin 2\propto}}\cdot\frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto}+2 =$$

$$= \sqrt{\frac{4\cos^2 2\propto}{\sin^2 2\propto}}\cdot\frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto}+2 = \frac{2|\cos 2\propto|}{|\sin 2\propto|}\cdot\frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto}+2.$$

Оскільки $\frac{\pi}{2} < \propto < \frac{3\pi}{4}$, то $\pi < 2\propto < \frac{3\pi}{2}$ (кут $2\propto$ лежить у ІІІ координатній чверті).

Отже, $\cos 2\propto < 0, \sin 2\propto < 0$; $\frac{2|\cos 2\propto|}{|\sin 2\propto|} \cdot \frac{\sin 2\propto}{\cos 2\propto} + 2 = \frac{-2\cos 2\propto \cdot \sin 2\propto}{-\sin 2\propto \cdot \cos 2\propto} + 2 = 2 + 2 = 4.$

Відповідь: 4.

Приклад 5. Довести тотожність:

а)$\cos\propto + \cos 2\propto + \cos 6\propto + \cos 7\propto = 4\cos\frac{\propto}{2}\cos\frac{5\propto}{2}\cos 4\propto$;

б)$\sqrt{1\sqrt{0{,}5 - 0{,}5\cos 2\propto}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right)$, де $\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання:

а) $\cos\propto + \cos 2\propto + \cos 6\propto + \cos 7\propto = (\cos\propto + \cos 7\propto) + (\cos 2\propto + \cos 6\propto) =$

$$= 2\cos 4\propto \cos 3\propto + 2\cos 4\propto \cos 2\propto = 2\cos 4\propto(\cos 3\propto + \cos 2\propto) =$$

$$= 2\cos 4\propto\left(2\cos\frac{5\propto}{2}\cos\frac{\propto}{2}\right) = 4\cos\frac{\propto}{2}\cos\frac{5\propto}{2}\cos 4\propto.$$

$4\cos\frac{\propto}{2}\cos\frac{5\propto}{2}\cos 4\propto = 4\cos\frac{\propto}{2}\cos\frac{5\propto}{2}\cos 4\propto$, тотожність доведено.

б) $\sqrt{1\sqrt{0{,}5 - 0{,}5\cos 2\propto}} = \sqrt{1\sqrt{0{,}5(1 - \cos 2\propto)}} = \sqrt{1 - \sqrt{\sin^2\propto}} = \sqrt{1 - |\sin\propto|}$.

Оскільки кут α лежить у ІІІ координатній чверті, то $\sin\propto < 0$.

Отже, $\sqrt{1 - |\sin\propto|} = \sqrt{1 + \sin\propto} = \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \propto\right)} = \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right)} = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right)\right|$.

Оскільки $\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{3\pi}{4} < -\frac{\propto}{2} < -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} < -\frac{\propto}{2} + \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4}$

(кут $-\frac{\propto}{2} + \frac{\pi}{4}$ лежить у IV координатній чверті). Отже, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right) > 0$.

Звідси $\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right)\right| = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right) . \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\propto}{2}\right)$, тотожність доведено.

Приклад 6.Знайти найбільше і найменше значення виразу $3\sin x + \cos x$.

Розв'язання:

Нехай $3\sin x + \cos x = A$. Поділимо ліву й праву частини даної рівності на $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$;

$\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos x = \frac{A}{\sqrt{10}}$. Оскільки $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$, то знайдеться такий кут φ, коли $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ і $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. $\sin x \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos x = \frac{A}{\sqrt{10}}$;

$\sin(x + \varphi) = \frac{A}{\sqrt{10}}$; $A = \sqrt{10} \cdot \sin(x + \varphi)$. Отже, $-\sqrt{10} \le A \le \sqrt{10}$.

Відповідь:$-\sqrt{10} \le 3\sin x + \cos x \le \sqrt{10}$.

Приклад 7. Обчислити:

а) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$ б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$ в) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$

Оскільки $\frac{3}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\propto = \arcsin\frac{3}{4}$ – радіанна міра гострого кута прямокутного трикутника. Синус цього кута дорівнює $\frac{3}{4}$. Нехай у прямокутного трикутника (рис.8) протилежний кут дорівнює 3, а гіпотенуза – 4.

Тоді прилеглий катет відносно кута α дорівнюватиме $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ (за наслідком із теореми Піфагора).

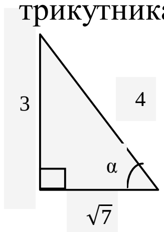


Рис..8

Отже, $\cos\propto = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\mathrm{tg}\ \propto = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $\mathrm{ctg}\ \propto = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Відповідь: $\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень I

1. Обчислити:

а) $\cos 240^o$ **б)** $\sin 425^o$ **в)** $\sin\frac{11\pi}{6}$ **г)** $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{3}$

2. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\propto\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\propto\right)$ **б)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\propto\right) + \cos(\pi+\propto)$

в) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\propto\right) + \mathrm{tg}(2\pi+\propto)$ **г)** $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\propto\right) + \mathrm{tg}(\pi+\propto)$

3.**а)** Обчислити $\sin\propto$, якщо $\cos\propto = -\frac{3}{5}, \pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$.

б) Обчислити $\cos\propto$, якщо $\sin\propto = -\frac{7}{25}, \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$.

в) Обчислити $\cos 2\propto$, якщо $\sin x = \frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$.

г) Обчислити $\cos 2\propto$, якщо $\cos x = \frac{12}{13}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. Спростити:

а) $1 + \sin^2\propto + \cos^2\propto$ **б)** $1 - \cos^2\propto + \sin^2\propto$ **в)** $(1-\sin\propto)(1-\sin\propto)$

г) $\frac{\cos^2\propto}{1-\sin^2\propto}$ **д)** $\mathrm{ctg}\propto\sin\propto$ **е)** $\cos^4\propto + \sin^2\propto\cos^2\propto$

є) $\frac{1}{\cos^2\propto} - \mathrm{tg}^2\propto$ **ж)** $\mathrm{tg}^2\propto(1-\sin^2\propto)$

5. Спростити:

а) $1 - 2\sin^2 4\propto$ **б)** $2\cos^2 3\propto - 1$ **в)** $2\sin^2\propto + \cos^2\propto$

г) $\frac{\sin 6\propto}{2\cos 3\propto}$ **д)** $\frac{\cos 6\propto}{\cos 3\propto - \sin 3\propto}$ **е)** $\frac{(1+\cos 2\propto)\sin\propto}{\cos\propto}$

6. Спростити:

а) $\cos\beta\cos 5\beta + \sin\beta\sin 5\beta$ **б)** $\sin 12\propto\cos 4\propto - \cos 12\propto\sin 4\propto$

в) $\frac{\cos 7\propto - \cos 3\propto}{\sin 2\propto}$ **г)** $\frac{\sin 7\propto + \sin\propto}{\cos 3\propto}$

д) $\sin(\propto - \beta) + \sin\beta\cos\propto$ **е)** $\cos\propto\cos\beta - \cos(\propto + \beta)$

7. Обчислити:

а) $\cos^2 75^o - \sin^2 75^o$ **б)** $2\sin 75^o\cos 75^o$

в) $\sin 131^o\cos 49^o + \cos 131^o\sin 49^o$ **г)** $\cos 94^o\cos 34^o - \sin 94^o\sin 34^o$

Рівень II

8. Спростити вираз:

а) $\frac{\sin(\pi-\propto)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\propto\right)+\mathrm{ctg}(\pi-\propto)}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\propto\right)}$ **б)** $\mathrm{tg}(\pi+\propto)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\propto\right) - \sin(\pi+\propto)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\propto\right)$

9. Знайдіть значення всіх тригонометричних функцій аргументу $\propto$, якщо:

а) $\cos\propto = \frac{4}{5}, 0 < \propto - \frac{\pi}{2}$ **б)** $\mathrm{tg}\propto = -\frac{1}{3}, \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$ **в)** $\mathrm{ctg}\propto = \frac{1}{2}, \pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$

10. Спростити вираз:

а) $(1 + \mathrm{tg}^2\propto)\cos^2\propto + (1 + \mathrm{ctg}^2\propto)\sin^2\propto$ **б)** $\frac{\cos 6\propto}{\cos 2\propto} - \frac{\sin 6\propto}{\sin 2\propto} + 2$

в) $\frac{\sin\propto - \sin 3\propto}{\sin 2\propto} \cdot \frac{\cos\propto\cos 3\propto}{\cos 2\propto} + 2$ **г)** $\frac{\mathrm{tg}2\propto\mathrm{tg}\propto}{\mathrm{tg}2\propto - \mathrm{tg}\propto}$ **д)** $\frac{(\sin\propto - \cos\propto)^2 - 1 + \sin 4\propto}{\cos 2\propto + \cos 4\propto}$

е) $\sin^4\propto + \sin^2\propto\cos^2\propto - \sin^2\propto + 1$

11. Довести тотожність:

а) $\frac{\sin(\propto - \beta)}{\cos\propto\cos\beta} = \mathrm{tg}\propto - \mathrm{tg}\,\beta$ **б)** $\frac{\sin 3\propto}{\sin\propto} - \frac{\cos 3\propto}{\cos\propto} = 2$

в) $\frac{\cos\propto - \cos 3\propto}{\sin\propto + \sin 3\propto} = \mathrm{tg}\propto$ **г)** $\frac{\sin\propto + \sin 2\propto + \sin 3\propto}{\cos\propto + \cos 2\propto + \cos 3\propto} = \mathrm{tg}\,2\propto$

Рівень ІІІ

12. Спростити вираз:

а) $\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + \propto\right)}{\mathrm{tg}^2(\propto - 2\pi)} + \frac{\cos^2(\pi - \propto)}{\mathrm{tg}^2\left(\propto - \frac{3\pi}{2}\right)}$ **б)** $1 - \frac{\mathrm{tg}\left(\propto + \frac{3\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}(\pi - \propto)} + \frac{\sin(\propto + \pi)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \propto\right)}$

13. Обчислити:

а) $\cos(\propto + \beta)$, якщо $\sin\propto = -0{,}8, \cos\beta = 0{,}6, \pi < \propto < \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

б) $\sin(\propto - \beta)$, якщо $\cos\propto = \frac{4}{5}, \cos\beta = -\frac{5}{13}, \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

14. Спростити:

а) $\frac{1}{1 - \mathrm{tg}^2\propto} - \frac{1}{1 - \mathrm{ctg}^2\propto}$ **б)** $\frac{(1 - \sin^2\propto)(\sin^4\propto - \sin 2\propto)}{\cos\propto + 2\cos 3\propto + \cos 5\propto}$ **в)** $\left(\frac{\sin 4\propto}{\sin\propto} - \frac{\cos 4\propto}{\cos\propto}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin 3\propto} + \frac{1}{\sin\propto}\right)$

г) $\frac{\sin 2\propto}{\sin 3\propto - \sin\propto} - \frac{1 - \cos 2\propto}{\cos\propto - \cos 3\propto}$ **д)** $\frac{\left(\sin\frac{\propto}{2} + \cos\frac{\propto}{2}\right)^2}{\sin\propto + 1}$

15. Спростити вираз та обчислити його значення:

$\frac{1}{\cos\propto + \cos 3\propto} + \frac{1}{\cos 3\propto + \cos 5\propto}$, якщо $\propto = \frac{\pi}{12}$

16. Довести тотожність:

а) $(\cos\propto - \cos\beta)^2 + (\sin\propto - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\propto - \beta}{2}$

б) $(1 - \cos\propto\cos\beta)^2 - \sin\propto^2\sin\beta = 4\sin^2\frac{\propto - \beta}{2}\sin^2\frac{\propto + \beta}{2}$

в) $\frac{1 - \sin^6\propto - \cos^6\propto}{1 - \sin^4\propto - \cos^4\propto} = \frac{3}{2}$ **г)** $3(\sin^4\propto + \cos^4\propto) - 2(\sin^6\propto + \cos^6\propto) = 1$

Самостійна робота №9

Тригонометричні рівняння

Теоретичні відомості

1. Найпростіші тригонометричні рівняння

До найпростіших тригонометричних рівнянь належать рівняння $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\mathrm{tg}\,x = a$, $\mathrm{ctg}\,x = a$.

Розв'язки рівняння $\cos x = a$, де $-1 \le a \le 1$, знаходять за формулою
$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;\ \ \arccos(-a) = \pi - \arccos a.$
Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$:
1) якщо $\cos x = 0$, тоді $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$
2) якщо $\cos x = 1$, тоді $x = 2\pi n,\ n \in Z;$
3) якщо $\cos x = -1$, тоді $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$
Якщо $|a| > 1$, тоді рівняння $\cos x = a$ коренів не має.

Розв'язки рівняння $\sin x = a$, де $-1 \le a \le 1$, знаходять за формулою
$x = (-1)^n \arcsin \propto + \pi n,\ n \in Z,\ \ \arcsin(-a) = -\arcsin a.$
Окремі випадки розв'язування рівняння $\sin x = a$:
1) якщо $\sin x = 0$, тоді $x = \pi n,\ n \in Z;$
2) якщо $\sin x = 1$, тоді $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$
3) якщо $\sin x = -1$, тоді $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$
Якщо $|a| > 1$, тоді рівняння $\sin x = a$ коренів не має.

Розв'язки рівняння $\operatorname{tg} x = a$, a – будь-яке, знаходять за формулою
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z,\ \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$
Якщо $\operatorname{tg} x = 0$, тоді $x = \pi n,\ n \in Z.$

Розв'язки рівняння $\operatorname{ctg} x = a$, a – будь-яке, знаходять за формулою
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z,\ \operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$
Якщо $\operatorname{ctg} x = 0$, тоді $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Приклади. Розв'язати рівняння:
а) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2};$ **б)** $2\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2};$ **в)** $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1;$
г) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -3;$ **д)** $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = 1{,}2.$

Розв'язання:

а) $2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z;\ \ 2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z;$
$2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;\ \ 2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$
$x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$
Відповідь: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$

б) $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$
$\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;\ \ \frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$
$\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \ \frac{x}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \ x = \pm 3\pi + \frac{4\pi}{3} + 8\pi n,\ n \in Z.$
Відповідь: $\pm 3\pi + \frac{4\pi}{3} + 8\pi n,\ n \in Z.$

в) $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,\ n \in Z;\ \ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$
Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

г) $\frac{x}{2} = \operatorname{arcctg}(-3) + \pi n,\ n \in Z;\ \ \frac{x}{2} = \pi - \operatorname{arcctg} 3 + \pi n,\ n \in Z;$
$x = 2\pi - 2\operatorname{arcctg} 3 + 2\pi n,\ n \in Z.$
Відповідь: $2\pi - 2\operatorname{arcctg} 3 + 2\pi n,\ n \in Z.$

д) Оскільки $1{,}2 > 1$, то рівняння $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = 1{,}2$ розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати рівняння $\cos^2 x = \frac{1}{4}$:

Розв'язання:

$\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$; $1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$; $\cos 2x = \frac{1}{2} - 1$; $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$; $2x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$; $2x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$;
$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

2. Тригонометричні рівняння, які зводяться до квадратних рівнянь відносно тригонометричних функцій

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0.$

Розв'язання:

Нехай $\sin x = t$, тоді $t^2 - 4t - 5 = 0$, $t_1 = 5$, $t_2 = -1$.

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 5 \text{ (рівняння розв'язків не має)} \\ \sin x = -1\end{array}\right.$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos 2x + \sin x = 0.$

Розв'язання:

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$; $1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$; $-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$;
$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Нехай $\sin x = t$, тоді $2t^2 - t - 1 = 0$. $D = 1 + 8 = 9$.
$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1$; $t_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

3. Однорідні тригонометричні рівняння

Однорідні тригонометричні рівняння – це рівняння, у яких ліва частина є многочленом, у кожному члені якого сума показників степенів синуса і косинуса одного й того й самого аргументу однакова, а права – нуль. Однорідні рівняння n-го степеня відносно синуса і косинуса розв'язують діленням обох частин на $\cos^n x$ або $\sin^n x$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - 3\sin x\ \cos x + \cos^2 x = 0.$

Розв'язання:

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. (Якщо $\cos^2 x = 0$, тоді $\cos x = 0$. Підставляючи у дане рівняння замість $\cos x$ число 0, дістанемо $2\sin^2 x = 0$, звідки $\sin x = 0$. А це суперечить властивостям синуса і косинуса одного й того й самого аргументу, оскільки якщо $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$.)

$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\ \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $2\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$; Нехай $\mathrm{tg}\, x = t$,
$2t^2 - 3t + 1 = 0$; $D = 9 - 8 = 1$; $t_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$; $t_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = 1 \\ \mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \\ x = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin^2 x - 3\sin x\ \cos x = 2.$

Розв'язання:

$\sin^2 x - 3\sin x\ \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$;$\sin^2 x - 3\sin x\ \cos x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$
$-\sin^2 x - 2\cos^2 x + 3\sin x\ \cos x = 0$; $\sin^2 x - 3\sin x\ \cos x + 2\cos^2 x = 0$.
Якщо $\cos x = 0$, тоді $\sin x = 0$ (а це не можливо), тому
$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\ \cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\, x + 2 = 0$. Нехай $\mathrm{tg}\, x = t$, тоді
$t^2 - 3t + 2 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$. $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = 1\\ \mathrm{tg}\, x = 2\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z\\ x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z\end{array}\right.$
Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\ \ \mathrm{arctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3\sin^2 x + 2\sin x\ \cos x = 3$. (1)

Розв'язання:

$3\sin^2 x + 2\sin x\ \cos x = 3\ (\sin^2 x + \cos^2 x)$;
$\cancel{3\sin^2 x} + 2\sin x\ \cos x - \cancel{3\sin^2 x} - 3\cos^2 x = 0$;
$2\sin x\ \cos x - 3\cos^2 x = 0$; $\frac{2\sin x\ \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $2\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$; $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{2} = 1{,}5$;
$x = \mathrm{arctg}\, 1{,}5 + \pi n,\ n \in Z$.
Якщо $\cos^2 x = 0$, тоді $\cos x = 0$. Підставляємо в рівняння (1) замість $\cos x$ число 0:
$3\sin^2 x + 2\sin x \cdot 0 = 3$; $3\sin^2 x = 3$; $3(1 - \cos^2 x) = 3$; $3(1 - 0) = 3$; $3 = 3$.
Отже, розв'язки рівняння $\cos x = 0$ є розв'язками рівняння (1).
Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\mathrm{arctg}\, 1{,}5 + \pi n,\ n \in Z$

4. Тригонометричні рівняння, які розв'язуються способом розкладання на множники

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin 3x + \sin x = \sin 4x$.

Розв'язання:

$2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\sin 2x\cos 2x$; $2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x = 0$;
$2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x = 0$; $2\sin 2x(\cos x - \cos 2x) = 0$;
$2\sin 2x \cdot \left(-2\sin\frac{x-2x}{2}\sin\frac{x+2x}{2}\right) = 0$; $4\sin 2x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sin\frac{x}{2} = 0,\\ \sin\frac{3x}{2} = 0;\end{array}\right.\left[\begin{array}{ll}2x = \pi n, & n \in Z;\\ \frac{x}{2} = \pi n, & n \in Z;\\ \frac{3x}{2} = \pi n, & n \in Z;\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z,\\ x = 2\pi n,\ n \in Z,\\ x = \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}n,\ \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3\sin x = 2(1 - \cos x)$.

Розв'язання:

$3 \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2 \cdot \sin^2\frac{x}{2}$; $6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} = 0$; $3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$;
$\sin\frac{x}{2}\left(3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2} = 0,\\ 3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0;\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2} = \pi n,\ n \in Z,\\ 3 - 2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 0;\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n \in Z,\\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 1{,}5;\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\ n \in Z,\\ \frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\, 1{,}5 + \pi n,\ n \in Z\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = 2\pi n,\\ x = 2\mathrm{arctg}\, 1{,}5 + 2\pi n,\ n \in Z\end{array}\right.$$

Відповідь: $2\pi n$, $2\mathrm{arctg}\, 1{,}5 + 2\pi n,\ n \in Z$

5. Метод введення допоміжного кута

Рівняння виду $a\ \sin x + b\ \cos x = c$, де a, b, c – деякі відмінні від нуля числа, зручно розв'язувати методом введення допоміжного кута. Поділимо обидві частини рівняння на

$\sqrt{a^2+b^2}$;

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то існує кут φ, що $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$, звідси $\mathrm{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{b}{a}+\pi n,\ n\in Z$. Тоді $\sin x\cos\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $x+\varphi=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n,\ n\in Z$;

$x=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\mathrm{arctg}\frac{b}{a}+\pi n,\ n\in Z$, якщо $c^2\le a^2+b^2$.

Приклад. Розв'язати рівняння $8\sin x-3\cos x=4$.

Розв'язання:

$\frac{8}{\sqrt{8^2+(-3)^2}}\sin x-\frac{3}{\sqrt{8^2+(-3)^2}}\cos x=\frac{4}{\sqrt{8^2+(-3)^2}}$; $\frac{8}{\sqrt{73}}\sin x-\frac{3}{\sqrt{73}}\cos x=\frac{4}{\sqrt{73}}$.

Оскільки $\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2=1$, то існує такий кут φ, що $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{73}},\\ \sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{73}},\end{cases}$ звідси $\mathrm{tg}\varphi=\frac{3}{8}$,

$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{3}{8}+\pi n,\ n\in Z$. Тоді, $\cos\varphi\ \sin x-\cos x\ \sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{73}}$;

$\sin(x-\varphi)=\frac{4}{\sqrt{73}}$; $x-\varphi=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{4}{\sqrt{73}}+\pi n,\ n\in Z$,

$x=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{4}{\sqrt{73}}+\mathrm{arctg}\frac{3}{8}+\pi n,\ n\in Z$.

Відповідь: $(-1)^n\cdot\arcsin\frac{4}{\sqrt{73}}+\mathrm{arctg}\frac{3}{8}+\pi n,\ n\in Z$.

6. Дробові раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=0$.

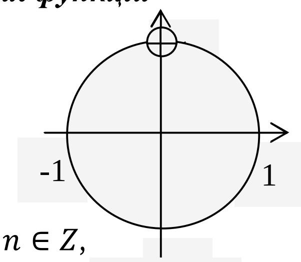


Рис.1

Розв'язання:

$$\begin{cases}1+\cos 2x=0,\\ 1-\sin x\neq 0;\end{cases}\begin{cases}\cos 2x=-1,\\ \sin x\neq 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=\pi+2\pi n,\ n\in Z,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z;\end{cases}\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z.\end{cases}$$

На одиничному колі (рис.1) позначаємо «•» серію кутів $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, а серію кутів $\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ n\in Z$ виключаємо. Відповідь до рівняння дає серія кутів, що залишилася: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

Відповідь: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{\sin 3x-\sin x}{1+\cos x}=0$.

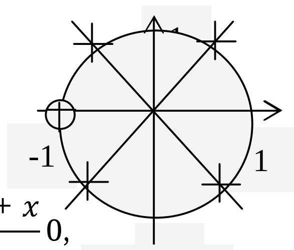


Рис.2

Розв'язання:

$$\begin{cases}\sin 3x-\sin x=0,\\ 1+\cos x\neq 0;\end{cases}\begin{cases}2\sin\frac{3x-x}{2}\cos\frac{3x+x}{2}0,\\ \cos x\neq -1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos 2x=0,\end{array}\right.\\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in Z,\\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z,\end{array}\right.\\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in Z,\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m,\ m\in Z,\end{array}\right.\\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$

На одиничному колі (рис.2) серію кутів $\pi k,\ k\in Z$ позначаємо позначкою «•» серію кутів $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m,\ m\in Z$, позначаємо позначкою «×», а серію кутів $\pi+2\pi n,\ n\in Z$ виключаємо.

Відповідь на рівняння дають серії кутів, що залишилася: $x = 2\pi l,\ l \in Z$
$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m,\ m \in Z.$

Відповідь: $2\pi l, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m,\ l, m \in Z.$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{3\cos^2 x - 4\cos x}{1 + \sin x} = 0.$

Розв'язання:

$$\begin{cases} 3\cos^2 x - 4\cos x = 0, \\ 1 + \sin x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x(3\cos x - 4) = 0, \\ \sin x \neq -1; \end{cases}$$

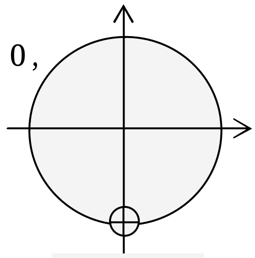


Рис.3

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 3\cos x - 4 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \ m \in Z, \\ \cos x = \frac{4}{3} \text{(розв'язків не має)}, \end{array}\right. \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z. \end{cases}$$

Тоді $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ (рис.3).

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

7. Оцінка лівої і правої частини рівняння

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2\sin^5 x + 3\cos^8 x = 5.$

Розв'язання:

Оскільки $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$, то $|2\sin^5 x + 3\cos^8 x| \leq 2|\sin^5 x|3\cos^8 x \leq 5.$
Дана нерівність могла б стати рівністю, коли $\sin x = 1$ і $|\cos x| = 1$, що неможливо, оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, дане рівняння розв'язків не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin^4 x + \cos^6 x = 2.$

Розв'язання:

Оскільки $\begin{cases} \sin^4 x \leq \sin^2 x, \\ \cos^6 x \leq \cos^2 x, \end{cases}$ то $\sin^4 x + \cos^6 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, $\sin^4 x + \cos^6 x \leq 1.$

Відповідь: рівняння коренів не має.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3.$

Розв'язання:

Ліва частина рівняння може дорівнювати 3 лише в тому випадку, коли одночасно виконуються три рівності: $\sin 2x = 1, \sin 3x = 1, \sin 4x = 1.$
Якщо $\sin 2x = 1$, тоді $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$, проте

$$\sin 3x = \sin 3\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi n\right) \neq 1.$$

Відповідь: рівняння розв'язків не має.

8. Заміна $t = \sin x + \cos x.$

Приклад. Розв'язати рівняння $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$.

Розв'язання:

Нехай $\sin x + \cos x = t$, тоді $t^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$;

$$t^2 + 2t = 0; t(t+2) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t + 2 = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = -2. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо рівняння $\sin x + \cos x = 0$: $\operatorname{tg} x + 1 = 0, \operatorname{tg} x = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

9. *Заміна* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

При такій заміні $\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Таким чином, ми отримуємо таку зміну: $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Приклад. Розв'язати рівняння $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2$.

Розв'язання:

Нехай $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, тоді $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{t}$. Ми можемо використати дану заміну, оскільки $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ не є коренями даного рівняння.

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2, \frac{2t^2 + 1 + t^2}{t(1+t^2)} = 2; \begin{cases} 3t^2 + 1 = 2t^3 + 2t, \\ t \neq 0. \end{cases}$$

$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0, (t-1)(2t^2 - t + 1) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} t - 1 = 0, \\ (2t^2 - t + 1) = 0 \text{ (рівняння не має дійсних коренів);} \end{array}\right.$$

$t = 1; \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень I

1. $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) = -1$ **3.** $2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$

4. $\sqrt{3} - \operatorname{tg} 2x = 0$ **5.** $3\cos 2x - 7 = 0$ **6.** $\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -1$

7. а) $\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x = \frac{1}{2}$ б) $\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x = 0$

8. а) $\sin 7x + \sin x = 0$ б) $\cos 9x - \cos x = 0$

9. а) $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$ б) $\cos^2 x + 5\cos x = 6$

10. а) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ б) $\sin^2 x + 14\sin x \cos x - 15\cos^2 x = 0$

Рівень II

11. $\frac{7}{\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)} = -7$ **12.** $\sin^2 x\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

13. а) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$ б) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

14. а) $3\cos x - \sin 2x = 0$ б) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

15. а) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$ б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

16. а) $\sin 5x \cos 3x - \sin 8x \cos 6x = 0$ б) $1 + \cos 8x = \cos 4x$

17. а) $5\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 4\cos^2 x = 3$ б) $2\sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x$

18. $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Рівень III

19. $5\sin x - 6 \cos x = 5$ **20.** $\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{3} \sin 2x$

21. $\frac{\sqrt{5-\sin^2 x}}{1+\sin x} = 1$ **22.** $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$

23. $\cos^2 x - 0{,}5 \sin 2x = 1$ **24.** $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos 3x$

25. $64^{\mathrm{tg}^2 x} + 8 = 9 \cdot 8^{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$ **26.** $\sin \frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$

27. $2\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg} x - 2$

Самостійна робота №10

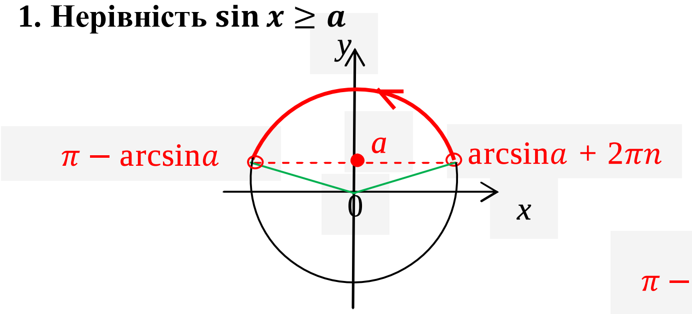
Розв'язування тригонометричних нерівностей

Теоретичні відомості

Розв'язування будь-яких тригонометричних нерівностей, як правило, зводиться до розв'язування тригонометричних нерівностей виду: $\sin x \geq a, \sin x \leq a, \cos x \leq a,$ $\cos x \geq a, \mathrm{tg} x \geq a, \mathrm{tg} x \leq a, \mathrm{ctg} x \geq a, \mathrm{ctg} x \leq a.$ Ці нерівності називають *найпростішими тригонометричними нерівностями*. Тригонометричні нерівності $\sin x \geq a$ мають розв'язки лише коли $a \in [-1; 1]$.

Покажемо за допомогою одиничного кола розв'язки кожної з цих нерівностей.

1. Нерівність $\sin x \geq a$



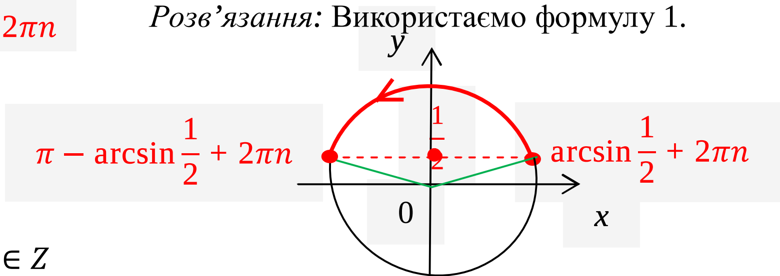
$\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$

$x \in [\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n], n \in Z$

Приклад 1.

Розв'яжіть нерівність: $\sin x > \frac{1}{2}$

Розв'язання: Використаємо формулу 1.



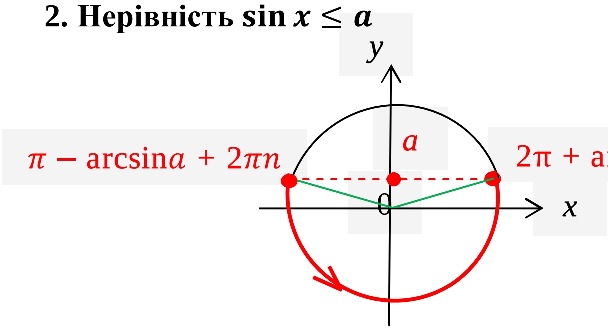
$$\pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n < x < \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

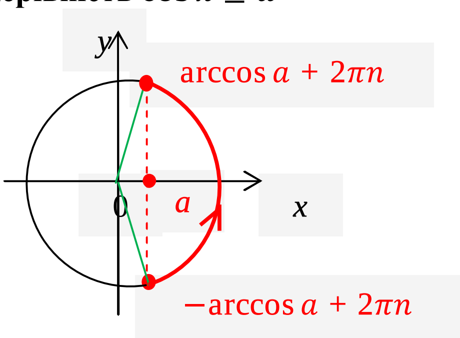
Відповідь: $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$

2. Нерівність $\sin x \leq a$



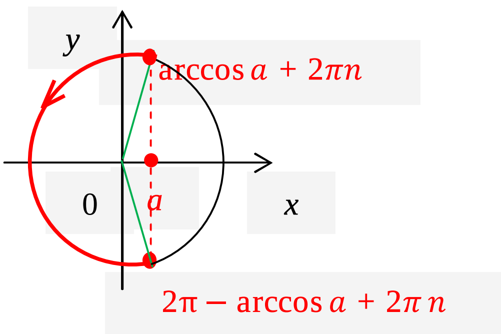
$\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + \arcsin a + 2\pi n$
$x \in [\pi - \arcsin a + 2\pi n; 2\pi + \arcsin a + 2\pi n],$
$n \in Z$

3. Нерівність $\cos x \geq a$



$-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in Z$
$x \in [-\arccos a + 2\pi n;\ \ \arccos a + 2\pi n], n \in Z$

4.Нерівність $\cos x \leq a$

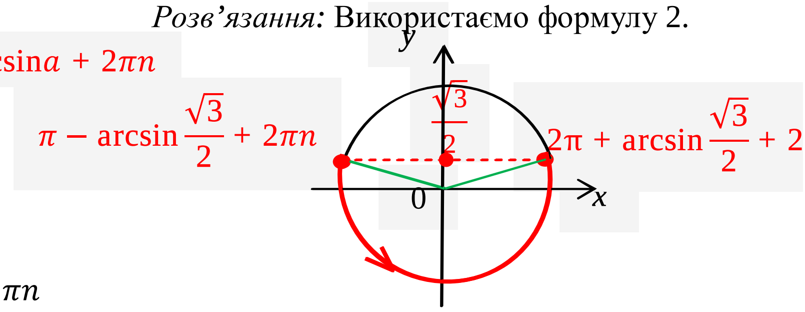


$\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n,$
$n \in Z$
$x \in [\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a\ + 2\pi n]$

Приклад 2.

Розв'яжіть нерівність: $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Розв'язання: Використаємо формулу 2.



$\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

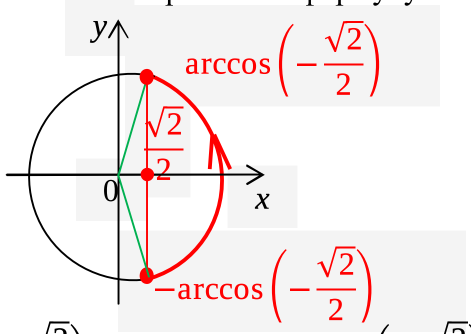
$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Відповідь: $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right],\ \ n \in Z$

Приклад 3.

Розв'яжіть нерівність: $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Розв'язання: Використаємо формулу 3.



$-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n \leq x \leq \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2\pi n,$
$n \in Z$

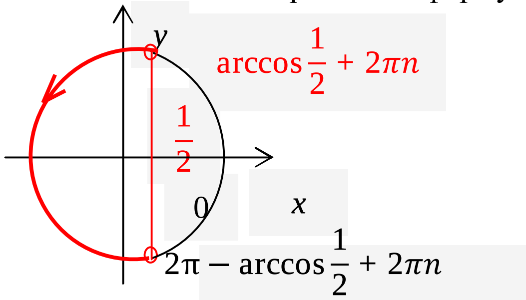
$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

Відповідь: $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right],\ \ n \in Z$

Приклад 4.

Розв'яжіть нерівність: $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Розв'язання: Використаємо формулу 4.

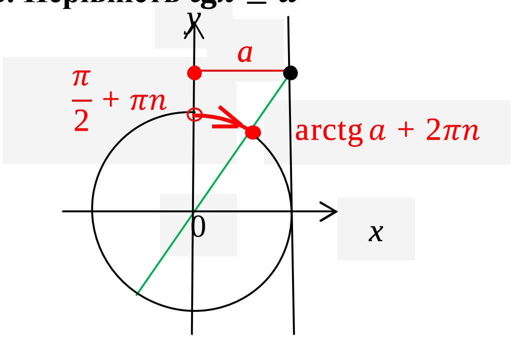


$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right],\ \ n \in Z$

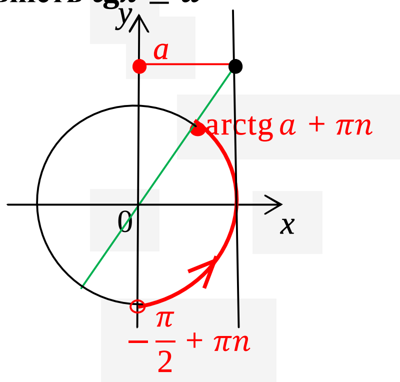
5. Нерівність tg$x \geq a$



$\operatorname{arctg} a + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x \in \left[\operatorname{arctg} a + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$

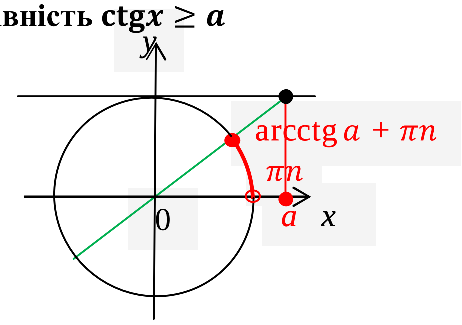
6. Нерівність tg$x \leq a$



$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right], n \in Z$

7. Нерівність ctg$x \geq a$



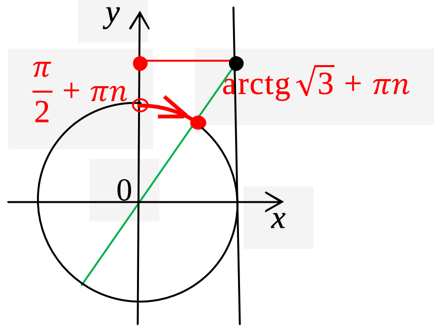
$\pi n < x \leq \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

$x \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n], n \in Z$

Приклад 5.

Розв'яжіть нерівність: $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$

Розв'язання: Використаємо формулу 5.



$\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

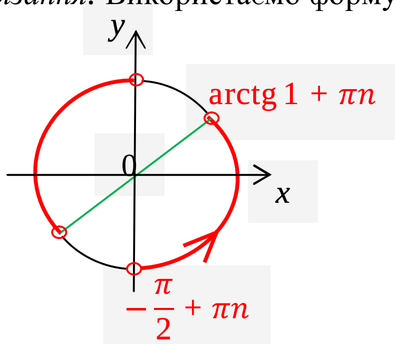
$\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$

Приклад 6.

Розв'яжіть нерівність: $\operatorname{tg} x < 1$

Розв'язання: Використаємо формулу 6.



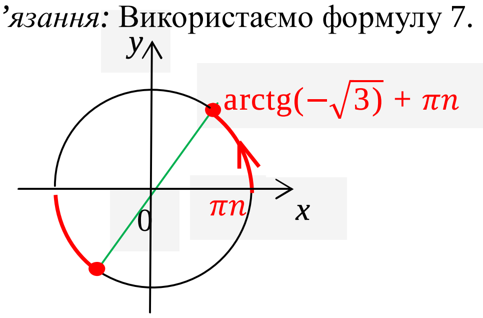
$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in Z$

Приклад 7.

Розв'яжіть нерівність: $\operatorname{ctg} x \geq -\sqrt{3}$

Розв'язання: Використаємо формулу 7.

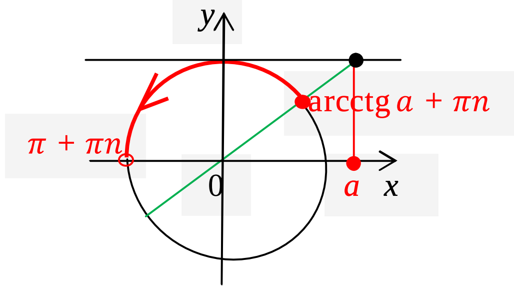


$\pi n < x \leq \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in Z$

$\pi n < x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Відповідь: $x \in \left(\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + \pi n\right],\ n \in Z$

8.Нерівність $\mathrm{ctg}x \le a$

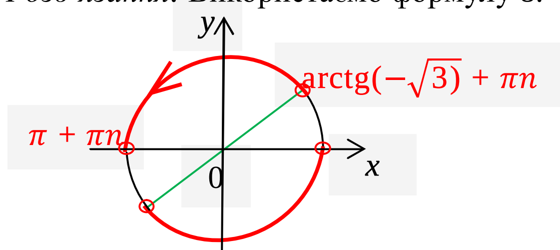


$\mathrm{arcctg}\, a + \pi n \le x < \pi + \pi n, n \in Z$
$x \in [\mathrm{arcctg}\, a + \pi n;\ \ \pi + \pi n), n \in Z$

Приклад 8.

Розв'яжіть нерівність: $\mathrm{ctg}\, x < -\sqrt{3}$

Розв'язання: Використаємо формулу 8.



$\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z$

$$\frac{5\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + \pi n;\ \ \pi + \pi n\right),\ \ n \in$

Приклади розв'язування більш складніших тригонометричних нерівностей

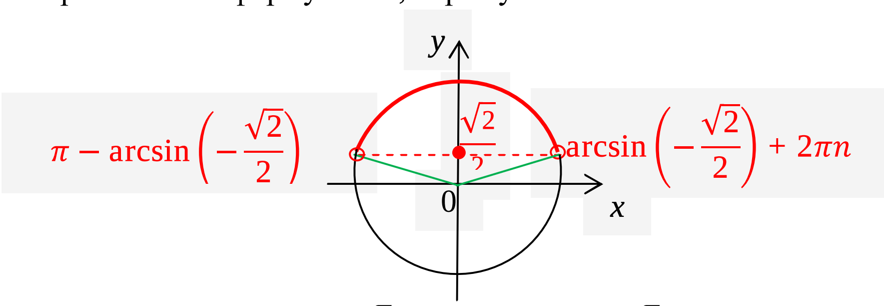
Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\sin x - \cos x > -1$.

Розв'язання

Маємо, $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > -1; 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -1; \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -1;$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.Нехай $x - \frac{\pi}{4} = t$.Тоді $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Скориставшись формулою 1, отримуємо:



$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \qquad n \in Z$$

Звідси $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$

$$2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Відповідь: $x \in \left(2\pi n;\ \ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),\ \ n \in Z$

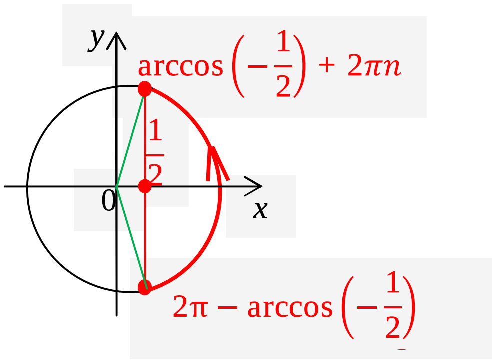
Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{5}{8}$.

Розв'язання:

Маємо, $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x + \cos^2 x < \frac{5}{8}$.

$1 - \frac{1}{2}\cdot 2\sin^2 x + \cos^2 x < \frac{5}{8};\ \ \frac{1}{2}\sin^2 2x > \frac{3}{8}; \frac{1 - \cos 4x}{2} > \frac{3}{8}\quad \cos 4x < -\frac{1}{2}$

Нехай $4x = t$. Отримуємо $\cos t < -\frac{1}{2}$.



Скориставшись формулою 2, отримуємо:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < 2\pi - \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, \qquad n \in Z$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right), \ n \in Z$

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність: $-5\sin x + 1 - 2\sin^2 x < 3$.

Розв'язання:

Маємо, $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 > 0$

Нехай $\sin x = t, |t| \leq 1$. Отримуємо $2t^2 + 5t + 2 > 0; t < -2$ або $t > -\frac{1}{2}$

Оскільки $|t| \leq 1$, то $\sin x > -\frac{1}{2}$. Скориставшись формулою 1, отримуємо:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $\sin 2x + \sin x > 0$.

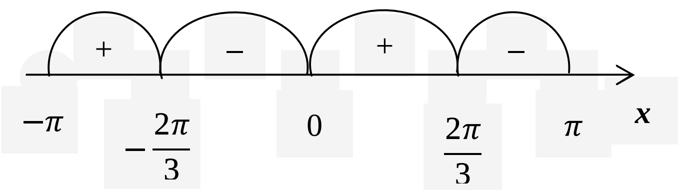
Розглянемо функцію $f(x) = \sin 2x + \sin x, D(f) = R$. Оскільки для всіх $x \in D(f)$ виконуються рівності $f(x - 2\pi) = f(x + 2\pi) = f(x)$, то функція f є періодичною з періодом 2π.

Знайдемо нулі функції f на проміжку $[-\pi; \ \pi]$

Маємо, $\sin 2x + \sin x = 0; 2\sin x \cos x + \sin x = 0; 2\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = 0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z.\end{array}\right.$$

На проміжку $[-\pi; \ \pi]$ функція f має п'ять нулів: $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, \ 0, \ \frac{2\pi}{3}, \ \pi$. Ці числа розбивають указаний проміжок на проміжки знакосталості.



Функція f набуває додатних значень на проміжках $\left(-\pi; \frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ або $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$

Завдання для самостійного виконання

Рівень І

1. $\sin x > -\frac{1}{2}$	**2.** $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	**3.** $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$	**4.** $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\mathrm{tg}\, x \geq -1$	**6.** $\mathrm{tg}\, x < -\sqrt{3}$	**7.** $\mathrm{ctg}\, x \geq 1$	**8.** $\mathrm{ctg}\, x < 2$

Рівень II

9. $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.** $\text{ctg}\, 5x > 1$ **11.** $\text{tg}\, 2x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\cos 4x \le \frac{1}{4}$ **13.** $\text{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \ge \sqrt{3}$ **14.** $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. $2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) < 1$ **16.** $\sin\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Рівень III

17. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x < \frac{1}{2}$ **18.** $-\frac{1}{2} \le \sin x < \frac{1}{4}$ **19.** $-2 < \text{tg}\, x < 3$

20. $-1 \le \text{ctg}\, x \le 3$ **21.** $\sin x \ge \cos x$ **22.** $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$

23. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$ **24.** $\sin 2x \sin x - \cos 2x \cos x \le \frac{1}{2}$

Самостійна робота № 11

Розв'язування вправ на обчислення похідних.

Теоретичні відомості.

Похідною функцією $y = f(x)$ у точці x_0називається границя відношення приросту Δy функції до приросту Δxаргументу за умови, що $\Delta x \to 0$, а границя існує, тобто

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Знаходження похідної називається диференціюванням. Функція, яка має похідну в точці x_0, називається диференційованою в точці x_0. Функція, диференційована в кожній точці деякого проміжку, називається диференційованою на цьому проміжку.

Правила диференціювання

1. $C' = 0,$ С - стала
2. $(x)' = 1$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(cu)' = cu',$ с – стала
5. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
7. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Формули диференціювання основних

елементарних функцій	**складних функцій**
	Вважаємо, що $u = u(x)$, тоді:
1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
2. $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
5. $(a^x)' = a^x \ln a,\quad (e^x)' = e^x$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u',\quad (e^u) = e^u \cdot u'$
6. $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

7. $(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad (tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad (ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad (arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad (arcctgu') = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Приклади знаходження похідних.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = 2x^3 - 3x^4 + 19$.

Розв'язання:

Використовуючи правила $(3), (4) (1)$та формулу (3), отримаємо:

$$y' = (2x^3 - 3x^4 + 19)' = (2x^3)' - (3x^4)' + (19)' = 2(x^3)' - 3(x^4)' + 0 = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 4x^3 =$$
$$= 6x^2 - 12x^3.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = (x^2 - 1)(3x^2 + 5)$.

Розв'язання:

Використовуючи правило (5), (4)та формулу (3), отримаємо:

$$y' = (x^2 - 1)'(3x^2 + 5) + (3x^2 + 5)'(x^2 - 1) = 2x(3x^2 + 5) + 6x(x^2 - 1) = 2x(3x^2 + 5 +$$
$$+3x^2 - 3) = 4x(3x^2 + 1).$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2-6}{3x+1}$.

Розв'язання:

Використовуючи правило (6)та формулу (3), отримаємо:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 6}{3x + 1}\right)' = \frac{(x^2 - 6)'(3x + 1) - (3x + 1)'(x^2 - 6)}{(3x + 1)^2} = \frac{2x(3x + 1) - 3(x^2 - 6)}{(3x + 1)^2} =$$
$$= \frac{6x^2 + 2x - 3x^2 + 18}{(3x + 1)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 18}{(3x + 1)^2}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \frac{7}{8x^6} + \sqrt[4]{x^3} - \frac{6}{\sqrt{x}} - x\sqrt[6]{x^5}$.

Розв'язання:

Перш ніж знаходити похідну, потрібно зробити перетворення даної функції:

$y = \frac{7}{8}x^{-6} + x^{\frac{3}{4}} - 6 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Тоді, використовуючи правила $(3), (4)$та формулу (3), отримаємо:

$$y' = \left(\frac{7}{8}x^{-6} + x^{\frac{3}{4}} - 6x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{7}{8}(-6)x^{-7} + \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} - 6\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{21}{4x^7} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x\sqrt{x}}.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = x\sqrt[6]{x^5}$.

Розв'язання:

Перш ніж знаходити похідну, потрібно зробити перетворення даної функції:

$y = x\sqrt[6]{x^5} = x \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{1+\frac{5}{6}} = x^{\frac{11}{6}}$. Тоді використовуючи формулу (3), отримаємо:

$$y' = \left(x^{\frac{11}{6}}\right)' = \frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}} = \frac{11}{6}\sqrt[6]{x^5}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = (3x^2 + 2x)^9$.

Розв'язання:

Представимо спочатку дану функцію через проміжну змінну $y = u^9, u = 3x^2 + 2x$. Тепер згідно правила диференціювання(7), або формули $(3a)$, отримуємо:

$$y' = ((3x^2 + 2x)^9)' = 9(3x^2 + 2x)^8(3x^2 + 2x)' = 9(3x^2 + 2x)^8(6x + 2).$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \sqrt[4]{(3x^3 - 2x + 9)^3}$.

Розв'язання:

$$y' = \left((3x^3 - 2x + 9)^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}(3x^3 - 2x + 9)^{-\frac{1}{4}}(3x^3 - 2x + 9)' = \frac{3(9x^2 - 2)}{4(3x^3 - 2x + 9)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{3(9x^2 - 2)}{4\sqrt[4]{3x^3 - 2x + 9}}$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = 5^x$.

Розв'язання:

Використовуючи формулу (5), отримаємо: $y' = 5^x ln5$.

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = 2^{\sin x}$.

Розв'язання:

Використовуючи формули $(5a)$, (6) отримаємо:

$$y' = 2^{\sin x}ln2(\sin x)' = 2^{\sin x}ln2\cos x.$$

Приклад 10. Знайти похідну функції $y = 0{,}5^{\sin(4x+5)}$.

Розв'язання:

Представимо спочатку дану функцію через проміжні змінні $y = 0{,}5^u$, $\mathrm{u} = \sin v$, $v = 4x + 5$.

Тепер згідно правила диференціювання(7) , або формул $(5a), (6a)$ отримаємо:

$$y' = 0{,}5^{\sin(4x+5)}ln0{,}5(\sin(4x + 5))' = 0{,}5^{\sin(4x+5)}ln0{,}5 \cdot \cos(4x + 5) \cdot (4x + 5)' =$$

$$= 4\cos(4x + 5)\, 0{,}5^{\sin(4x+5)}ln0{,}5 .$$

Приклад 11. Знайти похідну функції $y = 2^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

Розв'язання:

Представимо спочатку дану функцію через проміжні змінні $y = 2^u$, $\mathrm{u} = \sqrt{v}$, $v = x^2 + 3x + 4$.

Тепер згідно правила диференціювання(7),або формул $(5a), (4a)$таправил$(3), (4)$ отримаємо:

$$y' = \left(2^{\sqrt{x^2+3x+4}}\right)' = 2^{\sqrt{x^2+3x+4}}ln2\left(\sqrt{x^2 + 3x + 4}\right)' = 2^{\sqrt{x^2+3x+4}}ln2\frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 4}}.$$

Приклад 12. Знайти похідну функції $y = \sin(x^3 - 3x^2)$.

Розв'язання:

Представимо спочатку дану функцію через проміжну змінну $y = \sin u, u = x^3 - 3x^2$. Тепер згідно правила диференціювання(7) , або формул $(6a),(3)$ та правил $(3),(4)$ отримаємо:

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2) \cdot (x^3 - 3x^2)' = (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2).$$

Приклад 13. Знайти похідну функції $y = sin^3 4x$.

Розв'язання:

Представимо спочатку дану функцію через проміжні змінні $y = u^3, \mathrm{u} = \sin v, v = 4x$.

Тепер згідно правила диференціювання(7), або формул $(3a),(6a)$ та правил $(4),(2)$ отримаємо:

$$y' = (sin^3 4x)' = 3sin^2 4x(\sin 4x)' = 3sin^2 4x \cos 4x\,(4x)' = 3sin^2 4x \cos 4x \cdot 4 =$$

$$= 12sin^2 4x \cos 4x.$$

Приклад 14. Знайти похідну функції $y = lnsin^3 5x$.

Розв'язання:

$$y' = (lnsin^3 5x)' = \frac{1}{sin^3 5x}(sin^3 5x)' = \frac{1}{sin^3 5x} 3sin^2 5x(\sin 5x)' = \frac{3sin^2 5x}{sin^3 5x}\cos 5x \cdot 5 =$$

$$= \frac{15\cos 5x}{\sin 5x} = 15ctg5x.$$

Завдання для самостійного виконання.

Знайти похідні наступних функцій:

Рівень I

1. $y = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3.$ **2**. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9.$

3. $y = (2x^3 - 3)(2x^3 - 1).$ **4**. $y = (8^x + 5x^2 - x^3)\log_5 x.$

5. $y = \frac{3x-7}{2x+9}.$ **6**. $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

7. $y = (x^4 - 5x^2)^9.$ **8**. $y = \sin(x^5 - 2x).$

9. $y = 8^{\cos x}.$ **10**. $y = \sqrt{\sin x}.$

Рівень II

11. $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{x} - \frac{x^2}{2}$ **12**. $y = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt{x}$

13. $y = (3x - 1)^3(x + 1)^4$ **14**. $y = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^3.$

15. $y = \log_3(x^2 + 3x - 1)$ **16**. $y = cos^3 x.$

17. $y = 6sin^3 13x.$ **18**. $y = \sqrt[8]{(x^4 + 2x - 7)^5}.$

Рівень III

19. $y = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{7\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x^3}.$ **20**. $y = \frac{\sin 2x}{tg2x}.$

21. $y = (3^x + 5x^4)^5 \cdot 9^{2x+3}$. **22**. $y = 16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$.

23. $y = ln^2 sin(3x-2)$. **24**. $y = 7tg^3 6x$.

25. $y = log_3^5 \cos 7x$. **26**. $y = sincos^2(5x^3-6)$.

Самостійна робота № 12

Розв'язування вправ на дослідження функції та побудову графіка.

Теоретичні відомості

Загальна схема дослідження функції.

1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти точки перетину графіка з координатами осями. Для цього треба розв’язати дві системи рівнянь :

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$, і $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$.

Перша система дає точки перетину з віссю *Ox*, а друга - з віссю *Oy*.

3) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. З’ясування цих питань полегшить побудову графіка, оскільки її можна виконувати не в усій області визначення функції, а лише в певній її частині. Так, якщо *y=f(x)* - періодична функція з періодом T>0, то графік достатньо побудувати на відрізку числової осі, довжина якого дорівнює *T*, а потім цю частину графіка повторити на кожному з відрізків довжини Т. Якщо функція парна, то графік функції симетричний відносно осі *Oy*, якщо непарна - то відносно початку координат. Тому достатньо побудувати графік тільки коли $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити його і для $x < 0$.
4) Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції.
5) На основі дослідження побудувати графік функції.

Для зручності побудови графіка результати дослідження записують у таблицю

Приклад 1. Дослідити функцію та побудувати її графік :

$y = 8 - 2x - x^2$.

Розв’язання :

1^0. Знаходимо область визначення функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$

2^0. Перевіряємо функцію на парність, непарність $f(-x) = 8 - 2(-x) - (x)^2 = 8 + 2x - x^2$ні парна, ні непарна

3^0. Знаходимо точки перетину з вісями координат.

Перетин з віссю OX Перетин з віссюOY

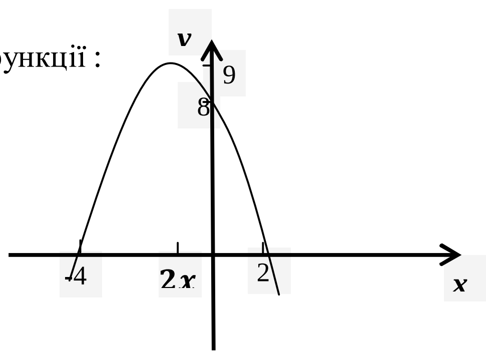
$x^2 + 2x - 8 = 0$ $x = 0 y = 8$

$x_1 = 2 x_2 = -4$ $(0; 8)$

$(2;\ 0)(-4;\ 0)$

4^0. Досліджуємо функцію на монотонність та екстремуми функції :

$y^/ = -2 - 2x;\quad -2 - 2x = 0;\quad -2(1 + x) = 0;\quad x = -1$



5^0. На основі дослідження будуємо графік функції.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y^x	↗	9	↘
$y^/$	+	0	−

Приклад 2. Дослідити функцію та побудувати її графік :

$$y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$$

Розв'язання :

1^0. Знаходимо область визначення функції :$D(f) = (-\infty; +\infty)$

2^0. Перевіряємо функцію на парність, непарність:$f(-x) = f(x)$ – парна

3^0. Знаходимо точки перетину з вісями координат.

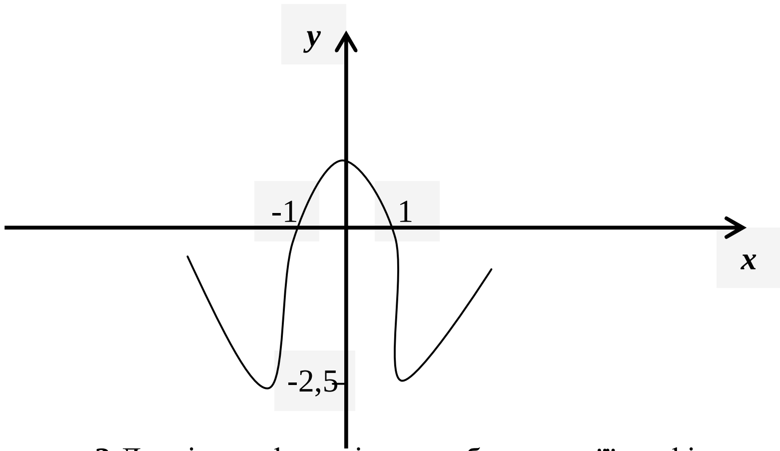
Перетин з віссю ОХ | Перетин з віссю ОY

$0 = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$ | $x = 0 y = 2 (0;\ 2)$

4^0. Досліджуємо функцію на монотонність та екстремуми функції : $y^/ = 2x^3 - 6x$; $2x(x^2 - 6) = 0$; $x_1 = 0 x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \approx (\pm 2{,}5) \pm 1{,}7$

x	$(-\infty; -1{,}7)$	$-\sqrt{3}$	$(-1{,}7; 0)$	0	$(0; 1{,}7)$	$\sqrt{3}$	$(-1{,}7; \infty)$
$y^/$	–	0	+	0	–	0	+
y	↘	$-\frac{5}{2}$	↗	2	↘	$\frac{5}{2}$	↗
		min		max		min	

5^0. На основі дослідження будуємо графік функції.



Приклад 3. Дослідити функцію та побудувати її графік :

$$y = 2x^3 - 6x$$

Розв'язання :

1^0. Знаходимо область визначення функції :$D(f) = (-\infty; +\infty)$

2^0. Перевіряємо функцію на парність, непарність:

$f(-x) = 2(-x)^3 - 6(-x) = -2x^3 + 6x = -(2x^3 - 6x) = -f(x)$непарна

3^0. Знаходимо точки перетину з вісями координат.

Перетин з віссю ОХ | Перетин з віссю ОY

$2x^3 - 6x = 0$ | $x = 0\ \ y = 0 (0;\ 0)$

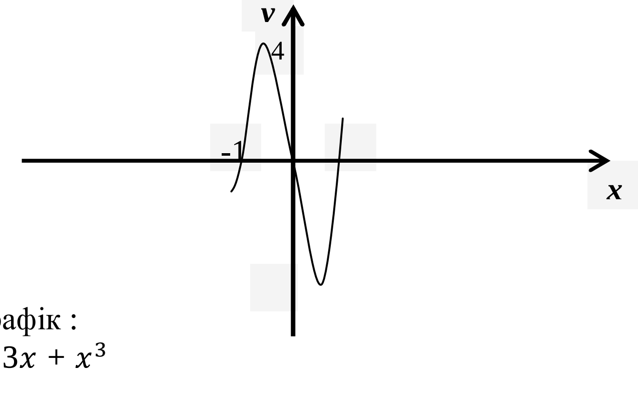
$x = 0\ \ x = \pm\sqrt{x}$

$(0; 0)(-\sqrt{3}; 0)(\sqrt{3}; 0)$

4^0. Досліджуємо функцію на монотонність та екстремуми функції :

$y^/ = 6x^2 - 6$; $6x^2 - 6 = 0$; $x_1 = 1 x_2 = -1$

$x \in$	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y^/$	+	0	–	0	+
y	↗	5	↘	–4	↗



5^0. На основі дослідження будуємо графік функції.

Приклад 4. Дослідити функцію та побудувати її графік :

$$y = 3 - 3x + x^3$$

Розв'язання :

1^0. Знаходимо область визначення функції :

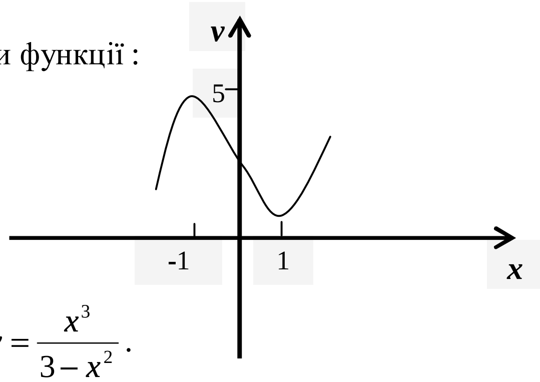
2^0.. Перевіряємо функцію на парність, непарність:

ні парна, ні непарна

3^0 Знаходимо точки перетину з вісями координат..

4^0. Досліджуємо функцію на монотонність та екстремуми функції :

; ; ;



				1	
	+	0	–	0	+
	↗	7	↘	1	↗

5^0. На основі дослідження будуємо графік функції.

Приклад 5. Дослідити та побудувати графік функції : $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Розв'язання :

1^0. Знаходимо область визначення функції : $3-x^2\neq 0$; $x^2\neq 3$; $x\neq\pm\sqrt{3}$. Отже, $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};0\right)$.

2^0. Перевіряємо функцію на парність, непарність : $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}$, тому

$y(-x)\neq y(x)-$ функція не може бути парною. $-y(x)=-\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)$, тому *y(x)=-y(x)*, отже функція непарна, а значить її графік симетричний відносно початку координат. У зв'язку з цим, можна досліджувати функцію тільки на проміжку $(0;\infty)$.

3^0. Знаходимо точки перетину з вісями координат. Якщо *x=0*, то *y=0*. Графік функції проходить через початок координат. Інших точок перетину з вісями координат немає.

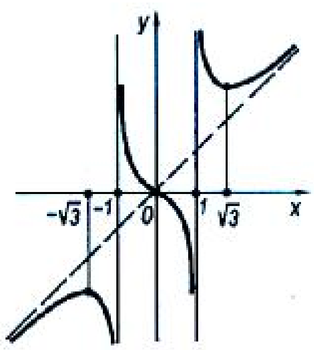
4^0. Досліджуємо функцію на монотонність та екстремуми функції :

$y'=\dfrac{(x^3)'(3-x^2)-(3-x^2)'x^3}{(3-x^2)^2}=\dfrac{3x^2(3-x^2)+2x\cdot x^3}{(3-x^2)^2}=\dfrac{9x^2-3x^4+2x^4}{(3-x^2)^2}=\dfrac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}=\dfrac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$. З рівняння

$\dfrac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}=0$; $x^2(9-x^2)=0$; $(3-x^2)^2\neq 0$; $x_1=0$; $x_2=-3$; $x_3=3$; $x\neq-\sqrt{3}$; $x\neq\sqrt{3}$.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
y'	-	0	+	+	0	+	+	0	-
y	↘	$\frac{9}{2}$	↗	↗	0	↗	↗	$-\frac{9}{2}$	↘

5^0. На основі дослідження будуємо графік функції.



Завдання для самостійного виконання

Дослідити функцію та побудувати її графік:

Рівень I

1. $y = x^2 + 2x - 3$ **2.** $y = 1 - 6x - x^2$ **3.** $y = 3x^2 - x^3$ **4.** $y = x^3 - 12x + 4$

Рівень II

5. $y = 3x - x^3$ **6.** $y = x^4 - 4x^2$ **7.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

8. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ **9.** $y = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$ **10.** $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$

Рівень III

11. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ **12.** $y = (3 - x^2)^2$ **13.** $y = 3x^5 - 5x^3$

14. $y = \frac{x^2}{x-1}$ **15.** $y = \frac{2}{x^2-4}$ **16.** $y = x^2 + \frac{2}{x}$

Самостійна робота №13

Розв'язування вправ на знаходження найбільшого та найменшого значення функції

Теоретичні відомості

Щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної функції $f(x)$ на проміжку [a;b], треба обчислити її значення $f(a)$, $f(b)$ на кінцях даного проміжку і в критичних точках, що належать цьому проміжку, і вибрати з них найбільше і найменше.

Приклад 1

Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 - 6x + 5$ на відрізку $\left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Розв'язання:

Знаходимо критичні точки, що належать інтервалу [-5/2; 3/2]

$y' = (2x^3 - 6x + 5)' = 6x^2 - 6$; $6x^2 - 6 = 0$; $6(x^2 - 1) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

Обчислимо значення функції в цих точках:

$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5 = 9$, $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 5 = 1$

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -11\frac{1}{4},\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 5 = 2\frac{3}{4}.$$

Таким чином, найбільше значення даної функції на даному відрізку $f(-1) = 9$, а найменше $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -11\frac{1}{4}$.

Приклад 2

Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ на відрізку [-1; 2]

Розв'язання:

Знаходимо похідну $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$.

Прирівнявши її до нуля і розв'язавши рівняння, знайдемо критичні точки:

$x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3 = 0$; $5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$

Критична точка $x_3 = 3$ не належить даному відрізку

Обчислимо значення функції в двох критичних точках:

$y(0)=0^5-5\cdot 0^4+5\cdot 0^3+3=3$

$y(1)=1^5-5\cdot 1^4+5\cdot 1^3+3=4$

Обчислимо значення функції на кінцях заданого відрізка $y(-1)=-8$; $y(2)=-5$

Порівнюючи отримані результати, робимо висновок, що найбільше значення функції $y(1)=4$ і найменше $y(-1)=-8$.

Практичне застосування похідної.

Розглянемо задачі на практичне застосування похідної. Наведемо алгоритм розв'язування таких задач.

1^0. По умові задачі скласти функцію для дослідження. Для цього потрібно встановити, яку величину вибрати за невідому змінну.

2^0. Від складеної функції знайти першу похідну.

3^0. Знайти критичні точки 1-го порядку.

4^0. Знайти другу похідну.

5^0. Обчислити значення другої похідної в критичних точках 1-го порядку і зробити висновок про найбільше та найменше значення функції.

Приклад 3

Розкласти число 100 на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

Розв'язання:

Позначимо перше число через *x*. Тоді друге число дорівнює 100-x. Потім складемо функцію $y=(100-x)$. Знайдемо те значення x, при якому функція має максимум :

$y=100x-x^2$; $y'=100-2x$; $100-2x=0$; x=50.

Знаходимо другу похідну $y''=-2$. Оскільки $y''(50)=-2<0,$ то при x=50 функція досягає максимуму. Отже, перше число 50, а друге 100-50=50. Тому, обидва числа однакові.

Приклад 4

З круглого бруска радіусу *R* потрібно вирізати прямокутну балку максимальної міцності. Відомо, що міцність балки прямо пропорційна добутку її ширини на квадрат висоти. Якими повинні бути розміри балки, щоб її міцність була найбільша?

Розв'язання:

Позначимо ширину балки через *x*, її висоту – через *y*, а міцність (на вигин) – через *I*, маємо $I=kxy^2$, де *k>0*– коефіцієнт пропорційності.

Таким чином, потрібно знайти максимум функції $I=kxy^2$. Щоб виразити міцність балки через одну з невідомих величин, зауважимо, що $x^2+y^2=4R^2$, звідки $y^2=4R^2-x^2$ і $I=kx(4R^2-x^2)=4kR^2x-kx^3$.

Знаходимо похідну і прирівнюємо її до нуля:

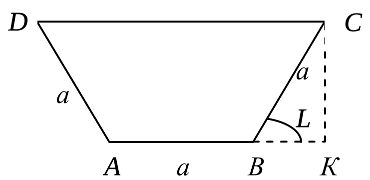
$I'=4kR^2-3kx^2$ або $k(4R^2-3x^2)=0$

Оскільки $k\neq 0$, то $4R^2-3x^2=0$, звідки $x=\pm 2R/\sqrt{3}$.

По змісту задачі дослідженню підлягає лише додатній корінь $x=2R/\sqrt{3}$. Оскільки $I''=-6kx<0$, робимо висновок, що при $x=2R/\sqrt{3}$ міцність балки буде максимальною.

Приклад 5

Зрошувальний канал має форму рівнобічної трапеції, бокові сторони якої дорівнюють меншій основі. При якому куті нахилу бічних сторін площа перерізу каналу буде найбільшою?



Розв'язання:

Позначимо меншу основу трапеції через *a*, кут нахилу сторін – через L і площу перерізу – через S. (мал..1).

З ΔBCK знайдемо $|BK|=a\cos L$. Тоді $|CD|=a+2a\cos L$.

Висота трапеціїдорівнює $|CK| = a\sin L$. Визначимо площу трапеції:

$$S = \frac{|AB| + |DC|}{2}|CK| = \frac{a + a + 2a\cos L}{2} a\sin L = a^2(1 + \cos L)\sin L$$

Щоб знайти найбільше значення площі $S = S(L)$, потрібно знайти критичні точки, що належать інтервалу $(0;\frac{\pi}{2})$, обчислити значення функції в цих точках і на кінцях інтервалу

$(0;\frac{\pi}{2})$, а потім із отриманих результатів вибрати найбільший.

Знаходимо похідну:

$$S'(L) = a^2((1+\cos L)'\sin L + (1+\cos L)(\sin L)') = a^2(-\sin^2 L + \cos L + \cos^2 L) =$$

$$= a^2(2\cos^2 L + \cos L - 1)$$

Прирівнюємо похідну до нуля і розв'яжемо отримане рівняння:

$2\cos^2 L + \cos L - 1 = 0$; $\cos L_1 = 1/2$; $\cos L_2 = -1$, звідки $L_1 = \pm Ï\ /3 + 2Ïn$, $L_2 = Ï\ + 2Ï$

. Інтервалу $(0;\frac{\pi}{2})$належить лише точка $L_1 = \frac{p}{3}$

$$S(L_1) = S\left(\frac{p}{3}\right) = a^2\left(1 + \cos\frac{p}{3}\right)\sin\frac{p}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2, \quad S(0) = 0, \quad S\left(\frac{p}{2}\right) = a^2.$$

Порівнюючи отримані результати, робимо висновок, що функція *S(L)*приймає найбільше значення при $L = \frac{p}{3}$.

Таким чином, площа переріз каналу є найбільшою, якщо кут похилу бічної сторони дорівнює 60^0.

Приклад 6

Добові витрати при плаванні судна складаються з двох частин сталої, що дорівнює a грн. і змінної, що зростає пропорційно кубу швидкості. При якій швидкості ϑплавання судна буде найбільш економічним?

Розв'язання:

Плавання буде найбільш економічним, якщо затрати на 1км шляху будуть найменші. З умови випливає, що за добу витрати становитимуть $a + kv^3$ (k – коефіцієнт пропорційності); при цьому за добу судно пройде шлях 24*v*км. Отже, витрати на 1км шляху складатимуть $P = \frac{a + kv^3}{24v}$.

Знаходимо похідну: $P'_V = \frac{2kv^3 - a}{24v^2}$. Критичне значення v отримаємо, розв'язавши рівняння, $P'_v = 0$,звідки $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. При переході через це значення P' змінює свій знак з мінуса на плюс, отже, функція має мінімум.

Отже, найбільш економна швидкість плавання є $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень І

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$, x є [1; 3]

б) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 7$, x є [-2; 0]

в) $y = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$, x є [-1; 1]

2. Знайти таке число, щоб різниця між цим числом і його квадратом була найбільшою

3. Розкласти число a на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

4. Знайти таке число, щоб різниця між цим числом і його квадратним коренем з нього була найменшою.

Рівень ІІ

5. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку:

а) $y=(x^2-1)(x+1)$, x є [-2; 0]

б) $y=\dfrac{x^2+8}{x-1}$, x є [-3; 0]

6. Розкласти число *6* на два невід'ємних доданки так, щоб добуток їх квадратів був найбільшим.

7. Зі всіх прямокутників, що мають периметр 20см, знайти той, у якого діагональ найменша.

8. Якими мають бути сторони прямокутної ділянки площею 1600м^2, якщо на її огорожу витрачено найменшу кількість матеріалу?

9. Парканом довжиною l необхідно загородити найбільшу за площею прямокутну ділянку, що межує з річкою. Якими мають бути розміри ділянки, якщо зі сторони річки паркан відсутній?

Рівень ІІІ

10. Для перевезення овочів необхідно виготовити ящики без кришок, що мають форму прямокутного паралелепіпеда. Об'єм кожного ящика 40,5дм^3, висота – 2дм. Якими повинні бути розміри основи ящика, щоб на його виготовлення було витрачено найменшу кількість матеріалу?

11. Вікно має форму прямокутника, завершеного півколом. Периметр вікна дорівнює a. Якими повинні бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільшу кількість світла?

12. З усіх циліндрів з площею повної поверхні $S=48p$ см^2 знайти той, який має найбільший об'єм?

13. Число 54 записано у вигляді суми трьох доданків. Відомо, що перший доданок у два рази більший від другого. Знайти ці доданки, знаючи, що їх добуток є найбільшим.

14. Який найбільший об'єм може мати конус з твірною, що дорівнює $2\sqrt{3}$ дм?

15. Щоб загородити клумбу, що має форму кругового сектора, потрібно взяти дріт довжиною 20м. Яким має бути радіус круга, щоб площа сектора була найменшою?

Самостійна робота №14

Первісна

Теоретичні відомості

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку *I*, якщо для кожного значення х з цього проміжку $F'(x)=f(x)$

Наприклад, на всій числовій осі (тобто на *R*) функція x^2 є первісною для $2x$, бо $(x^2)'=2x$; $\sin x$ є первісною для $\cos x$, бо $(\sin x)'=\cos x$.

Чи одна тільки функція x^2 є первісною для $2x$? Ні. Адже і $(x^2+3)'=2x$ і $(x^2-7)'=2x$ і т. д. Яке б не було число (довільна стала) *C*, то функція x^2+C – первісна для $2x$, бо $(x^2+C)'=2x$.

Чи існують інші функції, відмінні від x^2+C, первісні для $2x$? Ні.

Теорема.*(Основна властивість первісних.)*Кожна первісна для функції $f(x)$ має вигляд $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з цих первісних, а *C* – довільна стала.

$F(x)+C$ – загальний вигляд первісних для функції $f(x)$.

Операцію знаходження похідної даної функції називають *диференціюванням*. Обернена до неї операція – знаходження первісної – називається *інтегруванням*.

Таблиця первісних

Дана функція	k (стала)	x^n $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	a^x
Її первісна	$kx+C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\ln\|x\|+C$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
Дана функція	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Її первісна	$-\cos x+C$	$\sin x+C$	$tgx+C$	$-ctgx+C$

Користуючись таблицею, можна відразу писати, що, наприклад, для функції x^8 первісною є $\frac{1}{9}x^9+C$.

Правила знаходження первісних

I. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – первісні для функцій $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ – первісна для функції $f(x)+g(x)$.

II. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а k – довільне число, то $kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$.

III. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а k, b – довільні числа $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$.

Приклади. Знайдіть первісну для функції:

а) $x^4+\cos x$; **б)** $5\sin x$; **в)** $(7x+2)^3$.

Розв'язання:

а) x^4 і $\cos x$ первісними є відповідно $\frac{x^5}{5}$ і $\sin x$. Тому для суми даних функцій загальнийвигляд первісних $F(x)=\frac{1}{5}x^5+\sin x+C$

б) Для функції $\sin x$ первісною є $\cos x$ тоді за правилом II загальний вигляд первісної для функції $5\sin x$ є $-5\cos x+C$.

в) Одна з первісних для функції $(7x+2)^3$ згідно з правилом III є функція і $\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+2)^4}{4}$. Загальний вигляд первісних для даноїфункції $F(x)=\frac{1}{28}(7x+2)^4+C$.

Приклад. Знайти загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} + sin\frac{x}{2} - 3^x + (6-4x)^{10} - \frac{5}{3x-2}$$

Розв'язання:

Перепишемо функцію у вигляді:

$$f(x) = 2 \cdot x^{-\frac{3}{5}} + sin\frac{x}{2} - 3^x + (6-4x)^{10} - \frac{5}{3x-2}, \qquad \text{тоді}$$

$$F(x) = \frac{2 \cdot x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}}cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{ln3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(6-4x)^{11}}{11} - \frac{15}{3}ln|3x-2| + C =$$

$$= \frac{2 \cdot x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} - 2cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{ln3} - \frac{(6-4x)^{11}}{44} - 5ln|3x-2| + C =$$

$$5\sqrt[5]{x^2} - 2cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{ln3} - \frac{(6-4x)^{11}}{44} - 5ln|3x-2| + C$$

Відповідь: $5\sqrt[5]{x^2} - 2cos\frac{x}{2} - \frac{3^x}{ln3} - \frac{(6-4x)^{11}}{44} - 5ln|3x-2| + C$

Приклад.Для функції $y = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x$, знайти первісну, графік якої проходить через точку $A\,(1;\,-2)$.

Розв'язання:

$F(x) = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{x} - 2\frac{x^2}{2} + C = 3\sqrt{x} - x^2 + C$, отже загальний вигляд первісної має вигляд

$F(x) = 3\sqrt{x} - x^2 + C$ (*)

Знайдемо *C*, враховуючи, що графік первісної проходить через точку $A\,(1;\,-2)$, для цього підставимо у формулу (*) координату 1 замість x, а замість $F(x)$ координату -2:

$3\sqrt{1} - 1^2 + C = -2;$

$3 - 1 + C = -2;$

$2 + C = -2;$

$C = -2 - 2;$

$C = -4$

Отже, шукана первісна $F(x) = 3\sqrt{x} - x^2 - 4$

Відповідь:$F(x) = 3\sqrt{x} - x^2 - 4$

Завдання для самостійного виконання

1.Знайти загальний вигляд первісних для функцій $f(x)$:

Рівень I

1.1. $f(x) = x + 7$ **1.2.** $f(x) = 3x^2 + 4x$ **1.3.** $f(x) = \frac{1}{x} - 5^x$

1.4. $f(x) = \frac{4}{cos^2x} - sinx$ **1.5.** $f(x) = 9\cos x + \frac{1}{sin^2x}$ **1.6.** $f(x) = \frac{x^2}{4} - 4x^3$

Рівень II

1.7. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ **1.8.** $f(x) = (3x+5)^4$ **1.9.** $f(x) = \frac{4}{\sqrt{6-2x}}$

1.10. $f(x) = \sin(7x-3) + 5^{4x-1}$ **1.11.** $f(x) = \frac{4}{2x-3} + 2^{3x-4} + 7$

1.12. $f(x) = \frac{3}{sin^2\,3x} + cos\frac{x}{4} - e^{6-4x} + 8x - 1$

Рівень III

1.13. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6-2x}} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{8}{x^8} - 4$ **1.14.** $f(x) = sin(2x-3) - \frac{1}{cos^2(5-3x)} + e^{8x}$

1.15. $f(x) = \frac{15}{\sqrt[3]{(6-2x)^2}} - \frac{3}{(x-1)^9} + \frac{3}{6x-1} + 10$ **1.16.** $f(x) = 3^{1-x} - \sqrt[5]{(1-3x)^3} + \frac{10}{1-x} + sin\frac{x}{8}$

1.17. $f(x) = 3 - (6x+1)^7 - \cos(3x - 8) + \frac{10}{\sqrt{3x+5}} + \frac{1}{2}$

1.18. $f(x) = 4^{1-x} + \frac{3}{(6-8x)^5} + \frac{4}{cos^2(2-3x)} ln2$

2. Знайти для функції $f(x)$ первісну, графік якої проходить через дану точку A:

Рівень І

2.1. $f(x) = \sin x,\ A\ (\pi; -2)$

2.2. $f(x) = 6x,\ A\ (-1; 5)$

Рівень ІІ

2.3. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5,\ A\ (2; 6)$

2.4. $f(x) = 4x^3 - 2x + 3,\ A\ (1; 8)$

2.5. $f(x) = 5sin\frac{x}{2} + 2cos3x,\ A\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{2}{3}\right)$

2.6. $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}},\ A\ (1; 2)$

Рівень ІІІ

2.7. $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2},\ \ A\ (1; 1)$

2.8. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+5}},,\ \ A\ (5; 7)$

2.9. $f(x) = 6x^2 + e^{4x},\ \ A\left(\frac{1}{2}; -\frac{e^2}{4}\right)$

2.10. $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3})^2,\ \ A\ (0; 0)$

Самостійна робота №15

Визначений інтеграл

Теоретичні відомості

Визначеним інтегралом на проміжку $[a; b]$від неперервної на цьому проміжку функції $f(x)$називається приріст $F(b) - F(a)$будь-якої первісної F цієї функції на проміжку $[a; b]$; позначається $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$(Формула Ньютона-Лейбніца), де a – нижня границя інтегрування; b – верхня границя інтегрування; $f(x)$– підінтегральна функція.

Основні правила інтегрування:

1) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, c \in [a; b]$

4) $\int_a^b f(kx + p)\,dx = \left|\begin{matrix} kx + p = t, \\ k\,dx = dt, \\ dx = \frac{dt}{k} \end{matrix}\right| = \frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,dt$

Приклад 1. Обчислити визначені інтеграли:

Розв'язання:

а) $\int_2^3 6x^2 = 6\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 2x^3\Big|_2^3 = 2\cdot 3^3 - 2\cdot 2^3 = 38$

б) $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)\,dx = \left(5\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^2}{2} - 8x\right)\Big|_1^2 = (x^5 + x^2 - 8x)\Big|_1^2 =$

$= 2^5 + 2^2 - 8\cdot 2 - (1^5 + 1^2 - 8\cdot 1) = 32 + 4 - 16 - 1 - 1 + 8 = 26$

в) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{1^4} - \sqrt[3]{0^4}) = \frac{3}{4}$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} - \sin 2\cdot 0\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

Приклад 2. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^4 (4x^3 - 3x\sqrt{x})\,dx$ **б)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\,dx$ **в)** $\int_1^2 \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x}\,dx$

г) $\int_1^4 (2\sqrt{x} - x)^2 dx$ **д)** $\int_1^4 \left(\frac{3}{x} + x\right) dx$

Розв'язання:

а) $\int_1^4 (4x^3 - 3x\sqrt{x})\,dx = \int_1^4 \left(4x^3 - 3x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left(4\cdot\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Big|_1^4 = 4^4 - \frac{6}{5}(\sqrt{4})^5 - -\Big(1^4 - \frac{6}{5}\sqrt{1^5}\Big) = 256 - \frac{6}{5}\cdot 32 - 1 + \frac{6}{5} = 255 - 31\cdot\frac{6}{5} = 255 - 37\frac{1}{5} = 217\frac{4}{5} = 217{,}8$

Відповідь: 217,8.

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\cos\pi - \left(-\frac{1}{4}\cos 0\right) = -\frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Відповідь: $\frac{1}{2}$

в) $\int_1^2 \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{e^x}{x^3 e^x} \cdot \frac{x^3}{x^3 e^x}\right) dx = \int_1^2 (x^{-3} - e^{-x})\,dx = \left(\frac{x^{-2}}{-2} + e^{-x}\right)\Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2x^2} + e^{-x}\right)\Big|_1^2 =$

$$= \frac{1}{2\cdot 2^2} + e^{-2} - \left(-\frac{1}{2\cdot 1^2} + e^{-1}\right) = -\frac{1}{8} + e^{-2} + \frac{1}{2} + e^{-1} = \frac{3}{8} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} = \frac{3e^2 - 8e + 8}{8e^2}$$

Відповідь: $\frac{3e^2-8e+8}{8e^2}$

г) $\int_1^4 (2\sqrt{x} - x)^2 dx = \int_1^4 (4x - 4x\sqrt{x} + x^2)dx = \int_1^4 \left(4x - 4x^{\frac{3}{2}} + x^2\right) dx = \left(4\cdot\frac{x^2}{2} - 4\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^4$

$$= \left(2x^2 - \frac{8}{5}(\sqrt{x})^5 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 = 2\cdot 4^2 - \frac{8}{5}(\sqrt{x})^5 + \frac{1}{3}\cdot 4^3 - \left(2\cdot 1^2 - \frac{8}{5}(\sqrt{1})^5 + \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) =$$

$$= 32 - \frac{8}{5}\cdot 32 + \frac{64}{3} - 2 + \frac{8}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{5}\cdot 32 + 21 - \frac{2}{5} = -\frac{98}{5} + 21 = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = 1{,}4$$

Відповідь: 1,4.

д) $\int_1^4 \left(\frac{3}{x} + x\right) dx = \left(3\ln|x| + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 = 3\ln 4 + \frac{4^2}{2} - \left(3\ln 1 + \frac{1}{2}\right) = 3\ln 4 + 8 - 3\ln 1 - \frac{1}{2} =$

$$= 3\ln 2^2 + 8 - 0 - \frac{1}{2} = 6\ln 2 + 7{,}5$$

Відповідь: $6\ln 2 + 7{,}5$.

Завдання для самостійного виконання

Обчислити визначені інтеграли:

Рівень І

1. $\int_0^2 3x^4\,dx$ **2.** $\int_{-1}^2 2x^2\,dx$ **3.** $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 5)\,dx$ **4.** $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x + 4)\,dx$

5. $\int_1^2 (3x^3-6x-1)\,dx$ **6.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

8. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ **9.** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ **10.** $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ **11.** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x}$ **12.** $\int_6^1 \sqrt{x}\,dx$

Рівень II

13. $\int_1^4 \left(3x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$ **14.** $\int_1^3 \left(\frac{4}{x}-x\right)dx$ **15.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 8x\,dx$ **16.** $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos\frac{x}{3}\,dx$

17. $\int_2^3 (2x-1)^3\,dx$ **18.** $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ **19.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin 3x-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2})dx$

20. $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)dx$ **21.** $\int_0^{\frac{\pi}{24}} \frac{2dx}{\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$ **22.** $\int_0^{\frac{\pi}{24}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

Рівень III

23. $\int_1^5 \left(\sqrt{2x-1}\right)^3 dx$ **24.** $\int_9^{-54} \sqrt[3]{2-\frac{x}{9}}\,dx$ **25.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\sin 2x-\cos 2x)^2\,dx$

26. $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2dx}{\sin^2\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$ **27.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ **28.** $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

Самостійна робота №16

Невизначений інтеграл

Теоретичні відомості

Множина всіх первісних *F (x)+C* для функції *f(x)* називається *невизначеним інтегралом* і позначається $\int f(x)dx = F(x)+C$, де *f(x)* - підінтегральна функція, *f(x)dx* підінтегральний вираз.

Операція знаходження невизначеного інтегралу від деякої функції називається інтегруванням цієї функції.

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
8. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, a \neq 1$
13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 1$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, a \neq 0$
16. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
17. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

Властивості невизначених інтегралів

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$ 4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

5. $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. $\int dF(x) = F(x) + C$

6. Якщо($\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+\hat{a})dx = \frac{1}{k}F(kx+\hat{a}) + \tilde{n}$).

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int x^4 dx$; **б)** $\int x^{\frac{2}{3}} dx$; **в)** $\int 8x^3 dx$; **г)** $\int(5x^3 - 2x^2 + 3x - 8)dx$; **д)** $\int \frac{(3x+1)^2}{x}dx$;

е) $\int\left(7x^2 + 3\cos x - \sqrt[3]{x^2} - 8^x\right)dx$.

Розв'язання:

а) Застосуємо формулу 2 при n=4: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$.

б)Застосуємо формулу 2 при n= $\frac{2}{3}$:

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$$

в)Застосуємо властивість 4 та формулу 2: $\int 8x^3 dx = 8\int x^3 dx = 8\cdot\frac{x^4}{4} + C = 2x^4 + C$.

г)Застосовуючи властивості 4,5, а потім формулу 2, отримуємо:

$$\int(5x^3 - 2x^2 + 3x - 8)dx = 5\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + 3\int x dx - 8\int dx = 5\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 8x + C =$$

$$= \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C.$$

д) $\int\frac{(3x+1)^2}{x}dx = \int\frac{9x^2+6x+1}{x}dx = 9\int x dx + 6\int dx + \int\frac{dx}{x} =$

$9\frac{x^2}{2} + 6x + \ln|x| + C = 4.5x^2 + 6x + \ln|x| + C$.

е) Застосовуємо правила 5,4, а потім формули 2,5,2, :

$$\int\left(7x^2 + 3\cos x - \sqrt[3]{x^2} - 8^x\right)dx =$$

$$7\int x^2 dx + 3\int\cos x dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx - \int 8^x dx = \frac{7x^3}{3} + 3\sin x - \frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{8^x}{\ln 8} + C =$$

$$= \frac{7}{3}x^3 + 3\sin x - \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

Приклад 2. Знайти невизначені інтеграли :

а) $\int cos(3x+8)dx$; **б)** $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{5}}$.

Розв'язання:

а) Застосуємо властивість 6 та формулу 5: $\int cos(3x+8)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+8) + C$.

б) Застосуємо властивість 6 та формулу 8: $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{5}} = -5ctg\frac{x}{5} + C$.

Завдання для самостійного виконання

Знайти інтеграли :

Рівень I.

1. $\int x^6 dx$. **2.** $\int x^{\frac{3}{4}} dx.$ **3.** $\int 4x^7 dx$. **4.** $\int \left(6x^3 - 3x^2 + 2x - 5\right)dx$.

5. $\int \frac{8dx}{x}$ **6.** $\int \left(x^6 + 4e^x\right)dx$. **7.** $\int \left(7x^6 - 7^x + \sin\right)dx$. **8.** $\int \left(9\cos x - \frac{4}{\sin^2 x} dx\right)$.

Рівень II.

9. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx$. **10.** $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{a^3}\right)dx$. **11.** $\int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{4x^3}\right)dx$.

12. $\int \frac{(2x-1)^2}{x} dx$. **13.** $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$. **14.** $\int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx.$. **15.** $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{4} - 1\right)}$.

16. $\int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)}$. **17.** $\int (9x-5)^8 dx$. **18.** $\int \cos(4x+5)dx$.

Рівень III.

19. $\int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$. **20.** $\int 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x dx$. **21.** $\int \frac{dx}{14x-3}$. **22.** $\int 2^{7x+3} dx$.

23. $\int e^{5-3x} dx$. **24.** $\int e^{\frac{3+4x}{5}} dx$. **25.** $\int 5^{\frac{1-9\div}{15}} dx$. **26.** $\int \frac{x^2 dx}{x^2+9}$.

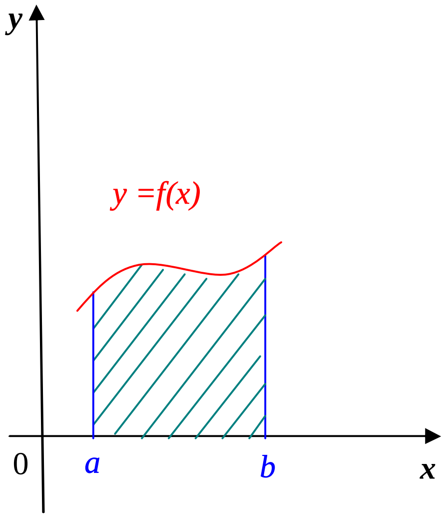
Самостійна робота №17

Розв'язання вправ на обчислення площ плоских фігур

Теоретичні відомості

1. Площа фігур обмеженої графіком функції *y=f(x)*, прямими *x=a*, *x=в* та додатнім напрямком осі ОХ (мал.1) обчислюється за формулою:

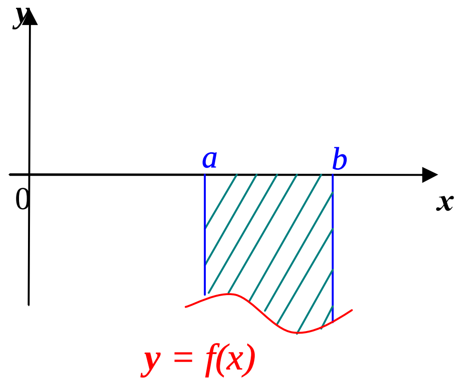
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



2. Правило обчислення площ плоских фігур:
   - По умові задачі роблять схематичний графік.
   - Представляють шукану площу як суму або різницю площ криволінійних трапецій. З умови задачі і графіка визначають межі інтегрування.
   - Записують кожну функцію у вигляді y=f(x).
   - Обчислюють площу кожної криволінійної трапеції і площу шуканої фігури.

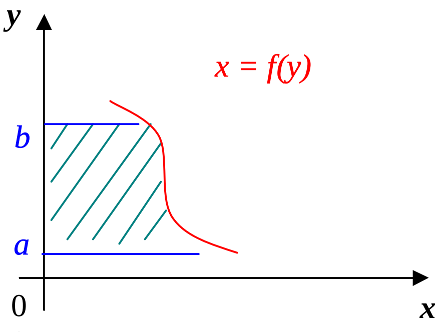
3. Площа плоскої фігури, розміщеної під віссю ОХ (мал.2) обчислюється за формулою :

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



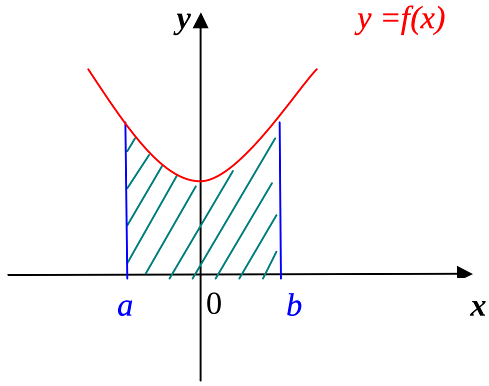
4. Площа плоскої фігури, розміщеної вздовж осі ОУ і обмеженої прямими *y=a, y=в*(мал.3) обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(y)dy$$



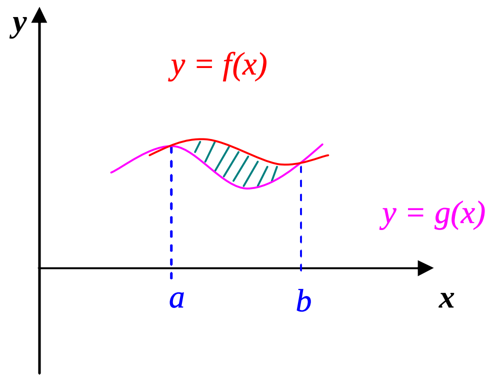
5. Площа плоскої фігури, розміщеної симетрично відносно вісі координат (мал.4), або початку координат обчислюється за формулою :

$$S = 2\int_0^a f(x)dx$$



6. Площа плоскої фігури, обмеженої графіками двох функцій *y=f(x)* та *y=g(x)* (мал.5), (мал.6) обчислюється за формулою :

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

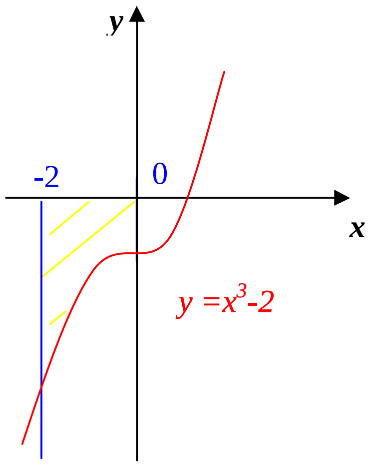


Приклад 1.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^3 - 2$, *x=-2, x=0, y=0*

Розв'язання:

Побудуємо малюнок. Графіком функції $y = x^3 - 2$є гіпербола опущена на 2 одиниці по осі OY, x=-2 пряма, яка проходить через абсцису -2 паралельно вісі *Oy*, *x=0* – вісь *OY*, *y=0* – вісь *OX*. Будуємо схематичний малюнок.



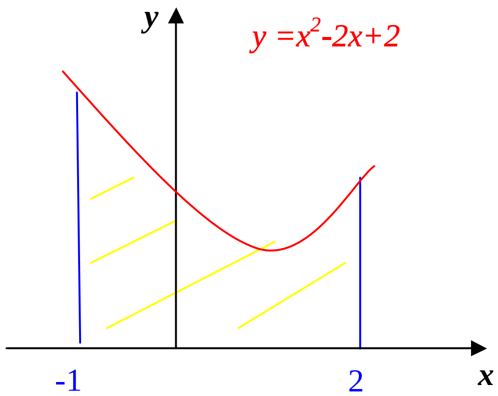
$S = -\int_{-2}^{0}(x^3-2)dx = -\left(\frac{x^4}{4} - 2x\right)\Big|_{-2}^{0} =$

$-\left(0 - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)\right)\right) = 8$ (кв.од.).

Приклад 2.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 2$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$.

Розв'язання:



Знайдемо вершину параболи

$y = x^2 - 2x + 2$: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$.

$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$.

Тоді x=-1 пряма, яка проходить через абсцису -1 паралельно вісі Оу, x=2 пряма, яка проходить через абсцису 2 паралельно вісі Оу. Будуємо схематичний малюнок.

$S = \int_{-1}^{2}(x^2 - 2x + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} =$

$= \frac{8}{3} - 4 + 4 - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 2\right) = 6$ (кв.од.)

Приклад 3

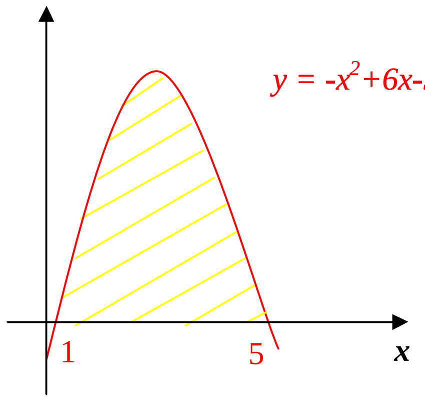
Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 6x - 5$, $y=0$.

Розв'язання:

Знайдемо вершину параболи $y = -x^2 + 6x - 5$: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3$.

$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$.

Розв'язавши систему, знайдемо точки перетину параболи і прямої:

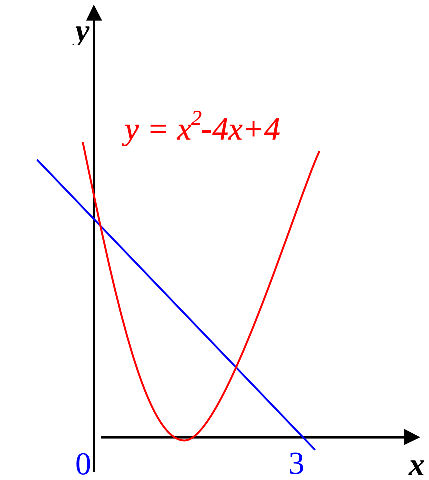


$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5, \\ y = 0; \end{cases}$ $-x^2 + 6x - 5 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 5$.

Це і будуть межі інтегрування.

$S = \int_{1}^{5}(-x^2 + 6x - 5)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x\right)\Big|_{1}^{5} =$

$= \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Big|_{1}^{5} = -\frac{125}{3} + 75 - 25 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = 10\frac{2}{3}$ (кв. од.)



Приклад4.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 4x + 4$, y=4-x

Розв'язання:

Знайдемо вершину параболи $y = x^2 - 4x + 4$:

Розв'язавшисистему $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = 4 - x \end{cases}$,знайдемо точки перетину параболи і прямої:$(0; 4)$, $(3; 1)$

$S = \int_0^3 (4 - x)\,dx - \int_0^3 (x^2 - 4x + 4)\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx =$

$= \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 3\cdot\frac{9}{2} - 9 - 0 = 4\frac{1}{2}$(кв.од.)

Приклад5.

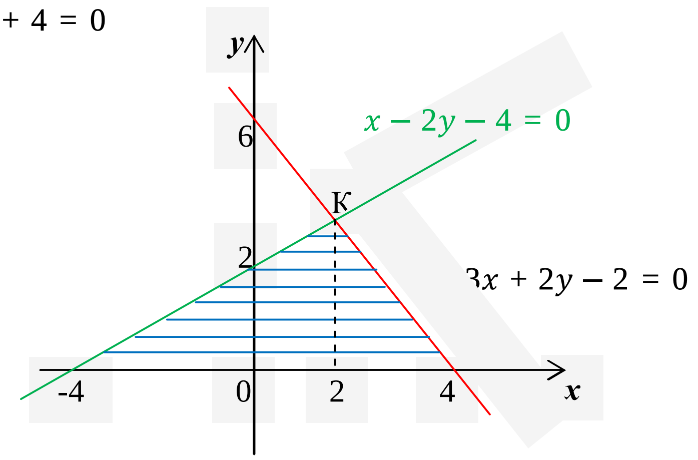
Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

$x - 2y + 4 = 0, 3x + 2y - 2 = 0, y = 0.$

Розв'язання:

Графіками даних ліній є прямі, тому знайдемо по дві точки, щоб побудувати малюнок:

$x - 2y + 4 = 0$



x	0	-4
y	2	0

x	0	4
y	6	0

Ми бачимо, що площу даного трикутника можна обчислити як суму площ двох трикутників $S = S_1 + S_2$.

Розв'язавши систему, знайдемо точку Кперетину прямих :

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ 3x + 2y - 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2y - 4, \\ x = (12 - 2y)/3; \end{cases}$$

$2y - 4 = (12 - 2y)/3; 6y - 12 = 12 - 2y; 8y = 24; y = 3; x = 2\cdot 3 - 4; x = 2.$

Отже К(2;3).

Запишемо рівняння прямих у вигляді $y = f(x)$: $y = \frac{x}{2} + 2$, $y = 6 - \frac{3}{2}x$.

Знайдемо площі трикутників S_1і S_2 :

$S_1 = \int_{-4}^{2}\left(\frac{x}{2} + 2\right)dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x\right)\Big|_{-4}^{2} = \frac{4}{4} + 4 - \left(\frac{16}{4} - 8\right)$=1+4-4+8=9 (кв.од.)

$S_2 = \int_2^4\left(6 - \frac{3}{2}x\right)dx = \left(6x - \frac{3}{4}x^2\right)\Big|_2^4 = 24 - \frac{3}{4}\cdot 16 - \left(12 - \frac{3}{4}\cdot 4\right) = 24 - 12 - 12 + 3 =$ 3(кв. од.)

Отже $S = 9 + 3 = 12$(кв. од.) .

*Відповідь:*12 кв. од.

Завдання для самостійного виконання

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

Рівень I

1. $y = x^2$, *y=0, x=3.*

2. $y = x^3$, *y=0, x=3.*

3. *y=sinx, y=0, x=0,* $x = p$.

4. *y=cosx, y=0,* $x = -\frac{p}{2}$, $x = \frac{p}{2}$.

5. $y = -x^2 + x + 6$, *y=0, x=-2, x=3.*

6. $y = -x^3 - 3$, *y=0, x=-3, x=0.*

7. *y=x-2, y=0, x=-5, x=-1*

8. *y=9-*x^2*, y=0, x=-1, x=2.*

Рівень II

9. *y=9-x,* $y = x^2 - 6x + 9$.

10. *y=4-*x^2*,* $y = x^2 - 4x + 4$.

11. $y = \frac{x^2}{4} + 5$, $y = \frac{3}{4}x^2 + 3$

12. *y=20-*x^2*, y=4*x^2*.*

13. *y=4-*x^2*, y=2+x.*

14. *y=4x-*x^2*, y=0,x=5.*

15. $y = x^2$, *y=4, y=9,x=0.*

16. $x = \sqrt{y}$, *x=0, y=1,y=9.*

17. y^2*=4x, 4y=*x^2*.*

18. $y = x^2 + 1$, *x=-2, x=2, y=0.*

Рівень III

19. *x-2y=4=0, x=y-5=0, y=0.*

20. *3x+2y-12=0, x-2y+4=0, y=0.*

21. $y = 2x^2$, $y = x^2 - x + 2$.

22. $y = 9 - x^2$, $y = x^2 - 6x + 9$.

Самостійна робота №18

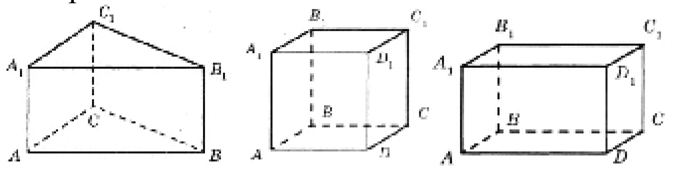
Розв'язування задач на обчислення площі поверхні та об'єму призми та паралелепіпеда

Теоретичні відомості

Многогранником називається геометричне тіло, поверхня якого складається із скінченої кількості многокутників.

Многокутники, які обмежують многогранник, називають **гранями**, а їх сторони – **ребрами**, кінці ребер – вершинами многогранника.

Призмою називається многогранник, у якого дві грані – рівні n- кутники, а решта n граней – паралелограми.



Рівні n- кутники, про які йдеться в цьому означенні, називають основами призми. Їх відповідні сторони попарно рівні й паралельні. Усі грані призми, які не є основами, називають **бічними гранями**.**Бічними ребрами призми** називають усі її ребра, які не є сторонами основ. Усі бічні ребра призми рівні й паралельні.

Призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи. Усі інші призми – **похилі.** Кожна бічна грань прямої призми – прямокутник.

Пряма призма називається **правильною**, якщо її основи є правильними многокутниками. **Висотою призми** називається відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра. Площина, що проходить через два бічні ребра призми, які не лежать в одній грані, називається **діагональною площиною**, а переріз призми цією площиною **– діагональним перерізом.**

Площею бічної поверхні призми називають суму площ її бічних граней.

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту призми .

Щоб знайти площу бічної поверхні похилої призми, треба знайти площу кожної її бічної грані й результати додати. Площа повної поверхні призми дорівнює сумі площ її бічної поверхні й двох основ:

Паралелепіпедом називається призма, основа якої – паралелограм. Усі грані паралелепіпеда – паралелограми.

Паралелепіпед, бічні ребра, якого перпендикулярні до площини основи, називається **прямим паралелепіпедом.** Його бічні грані – прямокутники.

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник називається **прямокутним паралелепіпедом.** Його бічні грані – прямокутники.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні, називається **кубом.**

Властивості граней і діагоналей паралелепіпеда:

1. У паралелепіпеда протилежні грані паралельні й рівні.
2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл.
3. Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.

Властивості граней і діагоналей прямокутного паралелепіпеда:

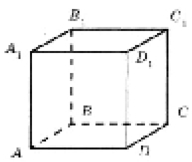
1. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні між собою.
2. У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої її діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його лінійних вимірів

Об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними вимірами a,b,c обчислюється за формулою:

.

Об'єм будь-якого паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту . Якщо в похилій призмі проведено переріз, який перпендикулярний до бічних ребер і перетинає всі бічні ребра, то , де площа перпендикулярного перерізу, довжина бічного ребра.

Задача 1. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 48 а площа повної поверхні – 66 Знайти об'єм призми.



Розв'язання:

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – зображення даної чотирикутної призми, $ABCD$ – квадрат, $AB = BC = CD = AD = a$, тоді

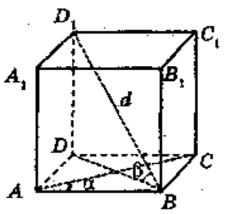
a = 3;

P = 4a = 4

Відповідь: 36

Задача 2. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом Кут між стороною основи та діагоналлю основи дорівнює . Знайти об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання:



Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – зображення даного прямокутного паралелепіпеда, у якому $BD_1 = d$, .

Оскільки BD – проекція похилої BD_1на площину основи, то кут кут між діагоналлю BD_1 і площиною основи. За умовою задачі З прямокутного знайдемо DD_1 і DB: $DD_1 = d$

$DB = d$

Оскільки діагоналі прямокутника рівні, то $DB = AC = d$

Із прямокутного знайдемо AB і BC: $AB = AC$

$BC = A$

–

– –

Відповідь: $\frac{1}{4}d^3 \sin 2\alpha \sin 2\beta \cdot \cos\beta$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень І

1. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 35 $см^2$. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо сторони основи – 3 см і 4 см.
   А) 98 $см^2$; Б) 49 $см^2$; В) інша відповідь;
2. Кімната має розміри 10 м, 6,5 м, 4 м. Обчисліть площу стін, які необхідно побілити, якщо площа вікон і дверей становить 0,2 площі стін.
   А) 100 $м^2$; Б) 106 $м^2$; В) 112 $м^2$; Г) інша відповідь;
3. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 4 см і 10 см і бічною стороною 5 см. Бічне ребро призми – 10 см. Обчисліть повну поверхню призми.
   А) 170 $см^2$; Б) 176 $см^2$; В) 186 $см^2$; Г) 190 $см^2$; Д) інша відповідь;
4. У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані утворює із стороною основи кут 30^0 і дорівнює 4 см. Знайдіть об’єм призми.
   А) $6\sqrt{3}см^3$; Б) $2\sqrt{3}см^3$; В) інша відповідь;
5. Основа прямого паралелепіпеда – ромб із стороною 6 см та кутом 60^0. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до основи під кутом 45^0. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.
   А) 108 $см^3$; Б) $108\sqrt{3}см^3$; В) інша відповідь;
6. В основі прямої призми лежить ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см, а бічне ребро – 20 см. Обчисліть об’єм призми.
   А) 960 $см^3$; Б) 320 $см^3$; В) 240 $см^3$; Г) 480 $см^3$; Д) інша відповідь;

Рівень ІІ

7. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 13 см, а діагональ його бічних граней - $4\sqrt{10}$ см і $3\sqrt{17}$ см. Визначте об’єм паралелепіпеда.
8. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з тупим кутом 120^0 і меншою основою 3 см. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут 45^0. Знайдіть об’єм призми.
9. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою що дорівнює а і кутом при вершині α. Переріз, проведений через дану сторону основи і протилежну вершину другої основи, утворює з основою кут φ. Знайдіть об’єм призми.
10. В основі прямої призми лежить ромб з тупим кутом β і меншою діагоналлю l. Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть бічну поверхню призми.
11. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як 1:7, довжини діагоналей бічних граней дорівнюють 13 см та 37 см. Визначте площу повної поверхні паралелепіпеда.

Рівень ІІІ

12. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро – 2 см. Через сторону АС нижньої основи і середину сторони A_1B_1 верхньої проведено площину. Знайдіть площу перерізу.
13. Основа прямої призми – ромб зі стороною а і тупим кутом α. Через більшу діагональ нижньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об’єм призми.
14. Основа прямої призми – ромб з гострим кутом α, площа якого дорівнює S. У призмі проведено діагональний переріз, що проходить через меншу діагональ основи. Діагональ

цього перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

15. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$сторона основи дорівнює $8\sqrt{2}$ см, а бічне ребро – 3 см. Через діагональ BD нижньої основи і середину сторони B_1C_1верхньої проведено площину. Знайдіть площу перерізу

Самостійна робота № 19

Розв'язування задач на обчислення площі поверхонь та об'ємів піраміди, зрізаної піраміди

Теоретичні відомості

Піраміда

Пірамідою називається многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. Ці трикутник зі спільною вершиною називають **бічними гранями**, їх спільну вершину **– вершиною піраміди**. Грань, яка не є бічною, називається **основою піраміди**.

Кожне ребро піраміди, яке не є стороною основи, називають **бічним ребром**.

Висота піраміди – перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину її основи. Піраміда називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а його центр збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, всі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники.

Висоту грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають **апофемою піраміди.**

Положення висоти піраміди в деяких пірамідах

1) Якщо в піраміді всі бічні ребра рівні або нахилені до площини основи під одним кутом, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди.
2) Якщо в деякій піраміді всі бічні грані утворюють із площиною основи один і той самий кут або якщо висоти всіх бічних граней рівні між собою, то основою висоти такої піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди.
3) Якщо в деякій піраміді всі бічні ребра рівні або утворюють з площиною основи один і той самий кут, то відстані від основи висоти піраміди до бічних ребер рівні між собою.
4) Якщо з основи висоти піраміди опустити перпендикуляр до бічної грані, то основа цього перпендикуляра лежить на висоті даної грані, проведеній із вершини піраміди. Кут між перпендикуляром і площиною основи дорівнює куту між перпендикуляром і проекцією зазначеної висоти на площину основи.
5) Якщо бічні грані піраміди утворюють із площиною основи один і той самий кут, то перпендикуляри, проведені з основи висоти піраміди до бічних граней, рівні між собою і утворюють однакові кути з площиною основи.

Площа бічної поверхні піраміди дорівнює сумі площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди: $\mathbf{S_б = p \cdot l}$, де p ─ півпериметр основи, l ─ апофема піраміди.

Площа бічної поверхні піраміди, у якій усі двогранні кути при основі рівні, дорівнює відношенню площі основи піраміди до конуса лінійного кута двогранного кута при основі піраміди: $\mathbf{S_б = \frac{S_о}{\cos\varphi}}$.

Площа повної поверхні піраміди дорівнює сумі площі бічної поверхні піраміди та площі основи: $\mathbf{S_п = S_б + S_о}$.

1) Переріз піраміди площиною, паралельно площині основи, є многокутник, подібний основі;
2) Бічні ребра й висота піраміди діляться площиною, паралельною основі, на пропорційні відрізки;
3) Площі перерізу й основи відносяться як квадрати їх відстаней від вершини.

Зрізана піраміда

Частина піраміди, що міститься між її основою і січною площиною, паралельною основі, називається **зрізаною пірамідою**.

Паралельні грані зрізаної піраміди називають її основами, решта – бічними гранями.

Висота зрізаної піраміди – відстань між площинами її основ.

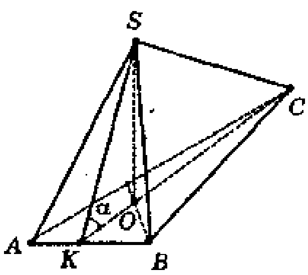
Основи зрізаної піраміди – подібні многокутники, а бічні грані – трапеції.

Зрізану піраміду називають **правильною**, якщо вона є частиною правильної піраміди.

Властивості правильної зрізаної піраміди

1) Основи – правильні многокутники.
2) Бічні ребра рівні.
3) Бічні грані рівні.
4) Апофеми рівні.
5) Двогранні кути при основі рівні.
6) Двогранні кути при бічних ребрах рівні.
7) Кожна точка осі піраміди рівновіддалена від усіх вершин основи.
8) Кожна точка осі піраміди рівновіддалена від площин бічних граней піраміди.
9) Висота дорівнює довжині відрізка осі, який міститься між основами.

Задача 1.



У правильній трикутній піраміді радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює R. Визначити площу повної поверхні піраміди, якщо двогранний кут при основі дорівнює .

Розв'язання:

Нехай SABC – зображення даної правильної трикутної піраміди, SO (ABC). Оскільки піраміда правильна, то O – центр вписаного і описаного кола, O , де CK AB.

Оскільки трикутник SAB – рівнобедрений і AK = BK, то SK AB.

За наслідком із теореми синусів маємо: $\frac{AB}{\sin 60^0} = 2R$; $AB = 2R \cdot \sin 60^0 = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot R$. $S_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}R\right)^2 \cdot \sin 60^0 = \frac{1}{2} \cdot 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Оскільки двогранні кути при основі піраміди рівні, то $S_б = \frac{S_0}{\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\cos\alpha} \cdot S_п = S_б + S_о =$
$= \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\cos\alpha} + \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$.

Відповідь: $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень I

1. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60^0.
   А) $144\sqrt{3}$см^3; Б) $36\sqrt{3}$см^3; В) інша відповідь;
2. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Двогранний кут при основі дорівнює 45^0. Знайдіть об'єм піраміди.
   А) 72 см^3; Б) 216 см^3; В) інша відповідь;
3. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює 45^0, а бічне ребро – 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
   А) $32\sqrt{2}$см^2; Б) $64\sqrt{2}$см^2; В) інша відповідь;
4. Основою піраміди є ромб – з діагоналями 6 см і 9 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 11 см.
   А) 99 см^3; Б) 297 см^3; В) інша відповідь;
5. Об'єм правильної чотирикутної піраміди – 48 см^3, а висота – 4 см. Знайдіть сторону основи цієї піраміди.
   А) 36 см; Б) 6 см; В) інша відповідь;
6. Апофема правильної чотирикутної піраміди утворює з висотою піраміди кут 60^0. Знайдіть об'єм піраміди, якщо довжина сторони основи $6\sqrt{3}$ см.
   А) 108 см^3; Б) $36\sqrt{3}$см^3; В) інша відповідь.

Рівень II

7. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і бічною стороною b. Визначте об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до основи під кутом β.
8. Основа піраміди – ромб зі стороною b і тупим кутом β. Бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом α. Знайдіть бічну поверхню піраміди.
9. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом β. Визначте бічну поверхню піраміди.
10. У правильній трикутній піраміді висота утворює з площиною бічної грані кут β. Визначте повну поверхню піраміди, якщо відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює b.
11. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 6 см. Бічна грань утворює з більшою основою кут 60^0. Знайдіть висоту піраміди.
12. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторона верхньої основи дорівнює 3 см, а бічне ребро довжиною 5 см нахилене до більшої основи під кутом 45^0. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

Рівень III

13. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з бічною стороною а і кутом α при основі. Бічна грань піраміди, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

14. Через сторону основи правильної трикутної піраміди і середину висоти проведено площину, яка утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює Н.

15. Основа піраміди – квадрат зі стороною 12 см, а дві суміжні бічні грані перпендикулярні до лощини основи. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

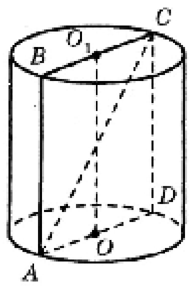
16. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з основою а і кутом α при вершині. Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть об'єм піраміди.

Самостійна робота №20

Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь та об'ємів циліндра, конуса

Теоретичні відомості

Циліндр



Циліндром називається тіло,утворене відрізками паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами і перетинають круг в одній з них.

Поверхня циліндра складається з **основ циліндра** – двох рівних кругів, які лежать у паралельних площинах і бічної поверхні.

Циліндр називається **прямим**, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ. Далі розглядатимемо прямий циліндр, називаючи його просто циліндром.

Прямий циліндр можна розглядати як тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони як осі.

Радіусом циліндра називається радіус його основи. **Висотою** циліндра називається відстань між площинами основ. **Віссю** циліндра називається пряма, яка проходить через центри основ. Вона паралельна твірним. Переріз циліндра площиною, яка проходить через вісь циліндра, називається **осьовим перерізом**. Площина, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до осьового перерізу проведеного через цю твірну називається **площиною дотичною до циліндра**.

Теорема Площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи.

Призмою, вписаною у циліндр називається призма основи якої – рівні многокутники, вписані в основи циліндра. Її бічні ребра є твірними циліндра. Призма називається описаною навколо циліндра, якщо її основи рівні многокутники, описані навколо основ циліндра. Площини її граней дотикаються до бічної поверхні циліндра.

Площа циліндра: : $\boldsymbol{S_n = S_b + 2S_o}$, $\boldsymbol{S_b = 2\pi rh = ch}$, $\boldsymbol{S_o = \pi R^2}$.

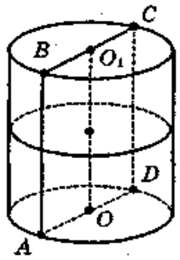
де c- довжина кола, h- висота циліндра або довжина його твірної, R – радіус основи.

Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту: $\boldsymbol{V = S_o \cdot H = \pi R^2 H}$,

де R – радіус основи, H – висота циліндра.

Задача 1. У циліндрі площа перерізу, перпендикулярного твірній, дорівнює S, а площа осьового перерізу дорівнює Q. Знайти площу повної поверхні і об'єм даного циліндра.

Розв'язання:



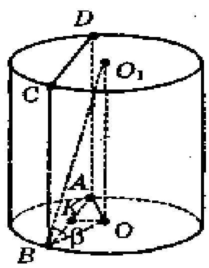
Нехай прямокутник *ABCD* – осьовий переріз даного циліндра.
AO =R, AB = H.
Переріз циліндра площиною, перпендикулярною твірній, є круг, площина якого паралельна основам циліндра.

За умовою задачі:

Відповідь:

Задача 2. У циліндрі з основою радіуса R паралельно його осі проведено площину, яка перетинає нижню основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом 2 Відрізок, який з'єднує центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут Знайти площу перерізу.

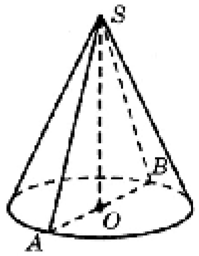
Розв'язання:



Нехай OO_1 – вісь циліндра, ABCD – його переріз; OA = OB = R;

Оскільки OB – проекція похилої O_1B на площину основи
– кут між O_1B та площиною основи циліндра. За умовою задачі
=
Оскільки OO_1 то *ABCD* – прямокутник.
Побудуємо OK , тоді з трикутника AOK ( ):
AK = AO
З прямокутного OO_1 = OB
Отже,
Відповідь:

Конус

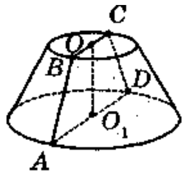


Конусом називається тіло, утворене всіма відрізками, які сполучають дану точку – **вершину конуса** – з точками деякого круга – **основи конуса**. Відрізки, які сполучають вершину конуса з точками кола основи, називається **твірними конуса**. Поверхня конуса складається з основи і **бічної поверхні.**

Конус називається **прямим**, якщо пряма, яка сполучає вершину кону са з центром основи, перпендикулярна до площини основи. Далі розглядатимемо тільки прямий конус, називаючи його просто конус.

Висотою конуса називається, перпендикуляр, опущений з його вершини на площину основи. У прямому конусі основа висоти збігається з центром основи. **Віссю** конуса називається пряма, яка містить його висоту. Переріз конуса площиною яка містить його вісь називають **осьовим перерізом.** Площина, яка проходить через твірну конуса і перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через цю твірну, називається **площиною дотичною до конуса.**

Теорема Площина перпендикулярна до осі конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню – по колу, центр якого лежить на осі конуса.



Конус **рівносторонній**, якщо його осьовий переріз правильний трикутник.

Площина, перпендикулярна до осі конуса, відтинає від нього менший конус. Частина кола що залишилась називається **зрізаним конусом.**

Пірамідою **вписаною у конус,** називається піраміда, основою якої є многокутник, вписаний у коло основи конуса, а вершиною вершина конуса. Бічні ребра піраміди, вписаної в конус є твірними конуса. Піраміда називається **описаною навколо конуса**, якщо її основою є многокутник описаний навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. Площини бічних граней описаної піраміди є площинами, дотичними до конуса.

Площа конуса: , , ,

– площа основи, – площа бічної поверхні конуса, - радіус основи, – довжина твірної.

Об'єм конуса: – ,

- радіус основи, – висота конуса.

Площа зрізаного конуса: , , ,

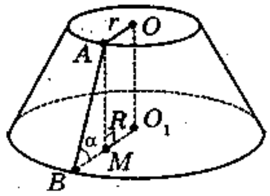
Об'єм зрізаного конуса: – ,

- радіуси основ, – висота зрізаного конуса.

Задача 3. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнює R і r, а твірна утворює з площиною основи кут Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.

Розв'язання:

Нехай AO = r, BO_1 = R. Побудуємо AM



Оскільки відрізок OO_1 перпендикулярний до площини основи зрізаного конуса, то відрізок AM також перпендикулярний до площини основи зрізаного конуса. Отже, BM – проекція похилої AB на площину основу.

– кут між твірною AB і площиною основи. За умовою задачі

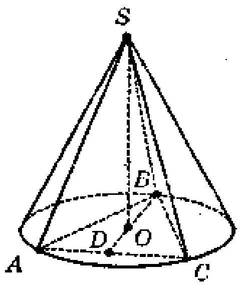
$BM = BO_1 - AO = R - r.$

Із AB = .

Відповідь: .

Задача 4. Об'єм конуса дорівнює . У конус вписана піраміда, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник із кутом при вершині. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання:



За умовою задачі об'єм конуса дорівнює тобто:

.

Нехай AB = BC = a, тоді –

За наслідком із теореми синусів

;

Відповідь: .

Завдання для самостійного виконання

Рівень І

1. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого 72 Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус основи дорівнює 3 см.

А) 108 $см^3$; Б) 108 π $см^3$; В) 72 π $см^3$; Г) інша відповідь.

2. Осьовий переріз циліндра – квадрат, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з основою кут 30^0. Обчисліть об'єм циліндра.

   А) $72\sqrt{2}\,\pi$ $см^3$; Б) 72 $см^3$; В) $72\sqrt{3}см^3$; Г) інша відповідь.

3. Площа бічної поверхні циліндра - $24\pi см^2$, а його об'єм дорівнює 48 π $см^3$. Знайдіть його висоту.

   А) 4 см; Б) 3 см; В) інша відповідь.

4. Твірна конуса – 10 см. Знайдіть об'єм конуса, якщо діаметр основи дорівнює 16 см.

   А) 64 π $см^3$; Б) 192 $см^3$; В) інша відповідь;

5. Площа бічної поверхні конуса – $260\pi см^2$. Твірна цього конуса дорівнює 26 см. Обчисліть синус кута між твірною і висотою конуса.

   А) $\frac{5}{13}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) інша відповідь.

6. Твірна конуса дорівнює 14 см, кут при вершині осьового перерізу дорівнює 60^0. Знайдіть повну поверхню конуса.

   А) $147\pi см^2$; Б) 147 $см^2$; В) інша відповідь.

Рівень ІІ

7. В основі конуса проведено хорду завдовжки $8\sqrt{2}$ см на відстані 4 см від центра основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом 60^0.
8. Об'єм конуса з радіусом основи 6 см дорівнює $96\pi см^3$. Обчисліть площу бічної поверхні конуса.
9. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з його більшою стороною кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням даного прямокутника навколо його меншої сторони.
10. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює а.
11. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм циліндра.
12. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює φ, проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо висота конуса дорівнює h і утворює з його твірною кут α.

Рівень ІІІ

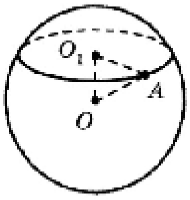
13. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнюєα, проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює а.
14. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S.
15. Через дві твірні конуса проведено площину, яка нахилена до площини його основи під кутом α. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра його основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює m.

Самостійна робота №21

Об'єм та площа поверхні кулі та її частин

Теоретичні відомості

Куля



Кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної точки на відстані, не більшій за дану.

Ця точка називається **центром кулі**, а дана відстань – **радіусом кулі**. Межею кулі є кульова поверхня або сфера. Точками сфери є всі ті точки кулі, які віддалені від центра на відстань, що дорівнює радіусу. Відрізок, що сполучає центр кулі, з точкою сфери, також називається радіусом. Відрізок, що сполучає дві точки кульової поверхні і проходить через центр кулі називається **діаметром.** Кінці будь-якого діаметра називаються **діаметрально протилежними точками кулі.**

Куля може бути утворена обертанням півкруга навколо його діаметра як осі.

Теорема Будь-який переріз кулі площиною є круг , центр цього круга є основою перпендикулярра, опущеного з центра кулі на січну площину.

Радіус круга, який матимемо у перерізі кулі площиною, можна обчислити за формулою: $R' = \sqrt{R^2 - 00^2}$, де R' - радіус круга перерізу; R – радіус кулі, $00'$ - довжина перпендикуляра.

Наслідок: площини, рівновіддалені від центра, перетинають кулю по рівних кругах.

Круг у перерізі площиною $\mathcal{L}$ буде тим більший, чим ближче площина $\mathcal{L}$ лежить до центра кулі, тобто чим менша відстань $00'$. Найбільший круг дістанемо, коли перетнемо кулю площиною, яка проходить через її центр. Радіус цього круга дорівнює радіусу кулі.

Площина, яка проходить через центр кулі називається **діаметральною площиною**. Переріз кулі діаметральною площиною називається **великим кругом**, а переріз сфери - **великим колом.**

Теорема Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.

Площина, яка проходить через точку А кульової поверхні й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, називається **дотичною площиною.** Точка А називається **точкою дотику**.

Теорема Дотична площина має лише одну спільну точку з кулею – точку дотину.

Пряма, яка проходить через точку А кульової поверхні й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку називається дотичною.

Теорема Через будь-яку точку кульової поверхні проходить безліч дотичних і всі вони лежать у площині, дотичній до кулі.

Рівняння сфери

$\mathrm{A(a; b; c;)}$ - центр сфери, R – радіус сфери.

Точками сфери є тільки ті й ті точки простору, відстані від яких до точки А дорівнюють R. Квадрат відстані від точки (x, y, z) до точки А дорівнює $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$. Тому рівняння сфери має вигляд: $\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \mathrm{R}^2}$**.**

Якщо центром сфери є початок координат то рівняння сфери буде: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2}$.

Теорема Лінія перетину двох сфер є коло.

Частини кулі

Кульовим сегментом називається частина кулі, яку відтинає від неї площина.

Кульовим шаром називається частина кулі, яка міститься між двома паралельними площинами, що перетинають кулю.

Кульовим сектором називається тіло, яке утворене з кульового сегмента й конуса так: якщо кульовий сегмент менший за півкулю, то кульовий сегмент доповнюють конусом, вершина якого лежить у центрі кулі, а основою є основа сегмента. Якщо ж сегмент більший за півкулю, то зазначений конус з нього вилучається.

Об'єм кулі та її частин

Об'єм кулі: $\boldsymbol{V} = \frac{4}{3}\boldsymbol{\pi R^2}$, де R- радіус кулі

Об'єм кульового сегмента: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\pi}\text{H}^2\left(\boldsymbol{R} - \frac{\text{H}}{3}\right)$, де R-радіус кулі, Н- висота сегмента.

Об'єм кульового сектора: $\boldsymbol{V} = \frac{2}{3}\boldsymbol{\pi R^2}\text{H}$, де R- радіус кулі, Н- висота.

Об'єм кульового шару між площинами x=a і x=b з центром в початку координат визначається за формулою: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\pi R^2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \frac{\pi}{3}(\mathbf{b}^3 - \mathbf{a}^3)$.

Площа кулі та її частин

Площа сфери радіуса $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{4\pi R^2}$

Площа поверхні сегмента: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{2\pi RH}$, де R- радіус сфери, Н – висота сегмента.

Площа поверхні сектора: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{2H} + \sqrt{\boldsymbol{2RH} - \boldsymbol{H^2}}\right)$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень І

1. Перерізом кулі площиною, яка проведена на відстані 4 см від центра, є круг площею 9π см^2. Знайдіть об'єм кулі.
   А) $\frac{500\pi}{3}$см^3; Б) 125πсм^3; В) 600πсм^3; Г) $\frac{125\pi}{3}$см^3.
2. Довжина кола дорівнює 6π см. Знайдіть площу круга, що обмежує це коло.
   А) 3πсм^2; Б) 9πсм^2; В) 36πсм^2; Г) 9 см^2.
3. Діаметр кулі дорівнює 8 см. Точка А належить дотичній площині до кулі і знаходиться на відстані 3 см від точки дотику кулі і площини. Знайдіть відстань від точки А до центра кулі.
   А) $\sqrt{73}$ см; Б) $\sqrt{55}$ см; В) 10 см; Г) 5 см.
4. На відстані 6 см від центра сфера проведено переріз, що перетинає сферу по колу, довжина якого дорівнює 16π см. Знайдіть площу сфери.
   А) 100πсм^2; Б) 256πсм^2; В) 400πсм^2; Г) 800πсм^2.
5. Об'єм двох куль відносяться як 27:64. Як відносяться площі їх поверхонь?
   А) 9:16; Б) 4:5; В) 3:8; Г) інша відповідь.
6. У скільки разів потрібно збільшити діаметр кулі, щоб її об'єм збільшився в 8 разів?
   А) у 2 рази; Б) у 4 рази; В) у 8 разів; Г) інша відповідь.

Рівень ІІ

7. У кулі, об'єм якої 36π см^3, проведено переріз. Радіус кулі, один з кінців якого належить перерізу, утворює із площиною перерізу кут 45^0. Знайдіть площу перерізу.
8. Переріз кулі площиною, яка віддалена від її центра на 15 см, має площу 64π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.
9. Визначте об'єм меншого кульового сектора кулі, якщо радіус кола його основи дорівнює 60 см, а радіус кулі – 75 см.
10. Знайдіть об'єм меншого кульового сегмента, якщо радіус кола його основи дорівнює 20 см, а радіус кулі дорівнює 25 см.

Рівень ІІІ

11. Два взаємно перпендикулярні перерізи кулі мають спільну хорду, довжина якої 12 см. Площі цих перерізів дорівнюють 100πсм^2 та 64πсм^2. Знайдіть радіус кулі.
12. Кулю перерізано двома паралельними площинами, площі яких дорівнюють 25πсм^2 і 144πсм^2, так, що центр кулі лежить між ними. Відстань між цими площинами 17 см. Знайдіть площу поверхні кулі.

13. На якій відстані від центра кулі радіусом 12 см повинна знаходитися точка, яка світиться, щоб вона освітлювала $\frac{1}{3}$ її поверхні?

14. Радіуси основ кульового пояса дорівнюють 3 м і 4 м, а радіус кулі – 5 м. Визначте об'єм кульового пояса, якщо паралельні площини, які перетинають кулю, розміщені по різні боки від центра кулі.

Самостійна робота №22

Комбінаториката, елементи теорії ймовірностей

Теоретичні відомості

1. Правило суми

Якщо елемент *a* можна вибрати *m* способами, а елемент b – n способами, то вибір можна здійснити $m + n$ способами. Наприклад, якщо на столі лежать 8 яблук і 4 груші, то брати один із фруктів можна 8 + 4 = 12 способами.

2. Правило добутку

Якщо елемент *a* можна вибрати *m* способами, а після цього елемент b можна вибрати *n* способами, то вибір «*a* і *b*» можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Наприклад, якщо на столі лежать 8 яблук і 3 груші, то вибрати пару фруктів – яблуко і грушу можна $8 \cdot 3 = 24$.

3. Перестановки

Будь-яка впорядкована множина (порядок елементів істотний), яка складається з *n* елементів, називається *перестановкою* з *n* елементів.

P_n– число перестановок з *n* елементів.

$P_n = n!$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n, (0! = 1)$

4. Розміщення

Будь-яка впорядкована підмножина з *n* елементів даної множини, яка містить *m* елементів $(n \leq m)$, називається *розміщенням* з *m* елементів по *n*.

A_m^n– число розміщень з *m* елементів по *n;*

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

5. Комбінації

Будь-яка підмножина з *n* елементів (порядок елементів не істотний) даної множини, яка містить *m* елементів, називається *комбінацією* з *m* елементів по *n*.

C_m^n– число комбінацій з *m* елементів по *n;*

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

6. Біном Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_m^n a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n$$

Нехай T_k–k-й член розкладу, тоді $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Приклад 1.Знайти член розкладу$\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$,який не містить *x*.

Розв'язання:

$T_{k+1} = C_{10}^k \cdot x^{10-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k$, тоді $10 - k - 4k = 0; -5k = -10; k = 2$

Звідси $T_{2+1} = T_3 = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 8!} = 9 \cdot 5 = 45$

Відповідь: 45.

Приклад 2. У розкладі $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ знайти член, що містить x^4.

Розв'язання:

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$ $.T_{k+1} = C_{10}^{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k} = C_{10}^{k}\cdot x^{\frac{10-k}{2}-\frac{k}{2}}$ тоді

$$\frac{10-k}{2}-\frac{k}{2} = 4; \frac{10-2k}{2} = 4; 10-2k = 8; -2k = -2; k = 1.$$

Звідси $T_2 = C_{10}^{1}x^4 = \frac{10!}{1!\cdot 9!}x^4 = \frac{9!\cdot 10!}{9!}x^4 = 10x^4$

Відповідь: $T_2 = 10x^4$

Приклад 3. Скількома способами можна п'ять солдат вишикувати в колону по одному?

Розв'язання:

$$P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

Відповідь: 120 способами.

Приклад4.Знайти кількість різних трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 0, 4, 5, що не повторюються.

Розв'язання:

$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Перестановки, що починаються з цифри 0, не є записом трицифрового числа. Тому шукана кількість трицифрових чисел дорівнює

$$P_3 - P_2 = 3! - 2! = 6 - 2 = 4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 5.На полиці стоять вісім підручників. Скількома способами можна поставити ці книги на полицю так, щоб алгебра, геометрія і фізика стояли поруч?'

Розв'язання:

Будемо розглядати підручники з алгебри, геометрії, фізики як одну книгу. Тоді на полиці треба розмістити не вісім книг, а 6. Це можна зробити P_6 способами. Алгебру, геометрію і фізику можна розмістити P_3 способами. Використовуючи правило множення, маємо, що шукана кількість способів дорівнює

$$P_6\cdot P_3 = 6!\cdot 3! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 36\cdot 120 = 4320.$$

Відповідь: 4320 способами.

Приклад 6. З 12 учнів треба вибрати трьох чергових. Скількома способами можна зробити такий вибір?

Розв'язання:

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} = 10\cdot 11\cdot 2 = 110\cdot 2 = 220$$

Відповідь: 220 способами.

Приклад 7.Знайти кількість двоцифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються.

Розв'язання:

$$A_{12}^{3} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!} = 20.$$

Відповідь: 20.

Приклад 8. У кошику лежать 8 різних яблук і 4 різні груші. Треба вибрати 3 яблука і 2 груші. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання:

Вибрати 3 яблука **з** 8 можна C_8^3способами. Відібрати 2 груші з 4 можна C_4^2 способами. Тоді за правилом добутку вибір потрібних фруктів можна здійснити $C_8^3\cdot C_4^2$способами.

$C_8^3 \cdot C_4^2 = \frac{8!\cdot 4!}{3!\cdot 5!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot \cancel{3!}\cancel{4}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{5!}\cdot \cancel{2\cdot 2}} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336$

Відповідь: 336 способами.

Елементи теорії ймовірностей

1. Подія

Подія – первісне поняття теорії ймовірностей. Під подією розуміють будь-яке явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається.

Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування або експерименту.

Події, які можуть відбутися, а можуть і не відбутися в процесі випробування або експерименту в однакових умовах, називаються *випадковими подіями.*

Події позначають великими буквами латинського алфавіту: $A, B, \ldots$.

Події A_1, A_2, …, An називаються *попарно несумісними* в даному випробуванні, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися разом.

Імовірною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися.

Неможливою називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Рівноможливі події – події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

2. Імовірність випадкової події

Імовірністю випадкової події А називається відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх рівноможливих подій, які утворюють певну групу подій під час певного випробування:

$P(A) = \frac{m}{n}$, де $P(A)$– ймовірність події А; m – кількість подій, які сприяють події A;

n – усіх рівноможливих подій, які утворюють певну групу подій під час певного випробування.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

3. Імовірність суми двох несумісних подій

Сумою подій A і B називається подія $A + B$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A або подія В.

Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

4. Теорема множення ймовірностей

Добутком подій A і B називається подія $A \cdot B$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A *і* B.

Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, яка обчислюється за умови, що перша подія вже відбулася:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$, де $P(B)$– ймовірність події B за умови, що відбулася подія A.

Подія B називається *незалежною* від події A, якщо поява A не змінює ймовірності події B.

Тоді $P_A(B) = P(B)$ і $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Імовірність появи хоча б однієї з незалежних подій $A_1, A_2 \ldots A_n$ можна обчислити за формулою: $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_2)\big) \cdot \ldots \cdot \big(1 - P(A_n)\big)$

5. Формула Бернуллі

Нехай проводять n незалежних експериментів, у кожному з яких подія A може відбутися, а може й не відбутися. Ймовірність того, що подія A відбудеться, у кожному з експериментів однакова і дорівнює p, а ймовірність того, що подія A не відбудеться, дорівнює $q = 1 - p$.

Тоді ймовірність того, що в n незалежних експериментах подія A відбудеться точно m разів, обчислюйся за формулою Бернуллі: $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-1}$.

Приклад 1.У, класі навчається 20 учнів, 15 із них відвідують математичний гурток. Яка ймовірність того, що навмання обраний учень виявиться членом математичного гуртка?

Розв'язання:

Нехай A– подія «навмання вибраний учень є членом математичного гуртка». Одного учня з 15 можна вибрати 15 способами, а одного учня з 20 можна вибрати 20 способами.

$$m = 15;\ \ n = 20.\ \ P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

Відповідь:$\frac{3}{4}$.

Приклад 2.Із 15 робітників 10 – штукатури, а 5 – муляри. Навмання відбирається бригада з 5 робітників.

Яка ймовірність того, що серед них буде 3 муляри і 2 штукатури?

Розв'язання:

Нехай A– подія «у навмання вибраній бригаді буде 3 муляри і 2 штукатури», тоді $n = C_{15}^5$. Трьох малярів із 5 можна вибрати C_5^3 способами, двох штукатурів з 10 можна вибрати C_{10}^2 способами, а 3 малярів із 5 і 2 штукатурів з 10 можна вибрати $C_5^3 \cdot C_{10}^2$ способами, тому

$$m = C_5^3 \cdot C_{10}^2; \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^5}$$

Відповідь:$\frac{C_5^3 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^5}$.

Приклад 3.У коробці 8 кульок, із них 3 білі. Навмання беруть одну за одною дві кульки, причому взяту кульку в коробку не повертають. Знайти ймовірність того, що обидві кульки будуть білі.

Розв'язання:

Нехай A – подія «перша взята кулька біла», B – подія «друга взята кулька біла», тоді AB – подія «обидві взяті кульки білі», тоді$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$. Після того як відбулася подія A, у коробці залишилося 7 кульок, із них тільки 2 білі.

Отже, $P_A(B) = \frac{2}{7};\ \ P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$.

Відповідь: $\frac{3}{28}$

Приклад 4.Два стрільці стріляють незалежно один від одного в одну й ту саму ціль. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого – 0,7. Визначити ймовірність влучення в ціль.

Розв'язання:

Нехай подія A– у ціль влучив хоча б один із стрільців. B – подія «у ціль влучив перший стрілець» С – подія «у ціль влучив другий стрілець», тоді

$$P(A) = 1 - \big(1 - P(A)\big)\big(1 - P(B)\big) = 1 - (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}94$$

Відповідь: 0,94.

Приклад 5.Знайти ймовірність того, що при 20 киданнях грального кубика три очка випаде рівно 4 рази

Розв'язання:

Нехай подія A–випало три очка при киданні грального кубика:

$P(A) = p = \frac{1}{6}; q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Отже, за формулою Бернуллі, маємо:

$$P_{4,20} = C_{20}^{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{16} = \frac{20!\cdot 5^{16}}{4!\cdot 16!\cdot 6^{20}} = \frac{{}_{16!}^{1}\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot {}_{20}^{5}\cdot 5^{16}}{{}_{1}^{16!}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot {}_{1}^{4}\cdot 6^{20}} = \frac{17\cdot {}_{18}^{3}\cdot 19\cdot 5\cdot 5^{16}}{{}_{1}^{6}\cdot 6^{20}}$$

$$= \frac{15\cdot 17\cdot 19\cdot 5^{16}}{6^{20}} = \frac{4845\cdot 5^{16}}{6^{20}}$$

Відповідь: $\frac{4845\cdot 5^{16}}{6^{20}}$.

Завдання для самостійного виконання

Рівень I

1. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 4, 5 і 6, якщо цифри у числі не повторюються?
2. Скількома способами з п’яти членів баскетбольної команди можна вибрати капітана та його заступника?
3. На конференції присутні 15 чоловік. Скількома способами можна вибрати 5 делегатів?
4. У кошику 20 яблук, з яких 7 червоних. Навмання витягують одне яблуко. Яка ймовірність того, що воно червоне?
5. У групі 12 хлопців і 16 дівчат. Яка ймовірність того, що навмання обраний студент цієї групи – хлопець?
6. Підкинули гральний кубик. Яка ймовірність того, що випало парне число?

Рівень II

7. Розв’яжіть рівняння:

   а)$C_x^2 = 66$; **б)**$P_{x+2} = 56P_x$; **в)**$C_{2x}^{x+1} : C_{2x+1}^{x-1} = \frac{2}{3}$
8. Скільки різних п’ятицифрових натуральних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 3, 5, 7, якщо цифри у кожному числі не повторюються?
9. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 1, 2, 3, 7, 11, 18 так, щоб чисельником і знаменником кожного дробу були числа з даного набору?
10. Є 6 різних блокнотів і 7 ручок. Скількома способами модна вибрати набір із 3 блокнотів і 2 ручок?
11. Є 5 карток із числами 2, 4, 6, 8, 10. Навмання вибираємо три з них. Яка ймовірність того, що з них можна утворити арифметичну прогресію?
12. У коробці 15 цукерок із чорного шоколаду і кілька з білого. Скільки в коробці цукерок з білого шоколаду, якщо ймовірність витягнути з коробки кукерку з білого шоколаду менша за $\frac{1}{5}$.

Рівень III

13. Розв’яжіть рівняння:

    а)$C_{x+1}^3 : C_x^4 = 6 : 5$; **б)**$C_{x+1}^2 \cdot A_x^2 - 4x^3 = (A_{2x}^1)^2$
14. Кожну букву, що входить у слово «рахувати», вписано на окрему картку. Яка ймовірність того, що після ретельного перемішування і виймання трьох карток дістанемо слово «рух»?
15. Будівельна організація виділила для будівництва школи бригаду з 5 робітників. В організації працюють 20 робітників, у тому числі 5 мулярів, 4 теслярі і 2 штукатури. Скількома способами можна укомплектувати бригаду, щоб до її складу входило по одному робітнику кожної з цих спеціальностей?
16. Є 6 квитків у театр, 4 з яких на місця першого ряду. Яка ймовірність того, що з трьох навмання вибраних квитків два виявляться на місця першого ряду?
17. У коробці лежать 12 червоних, 8 зелених і 10 синіх кульок. Навмання одну за одною беруть три кульки і в коробку не повертають. Знайти ймовірність того, що перша кулька буде червоною, друга – зеленою, третя – синьою.

Відповіді до самостійної роботи №1

1.1. спадає $[0;2)$ і $(2;\infty)$, зростає $(-\infty;-2)$ і $(-2;0]$. **1.2.** спадає $[-2;2]$, зростає $[-7;-2]$ і $[2;6]$. **1.3.** спадає $[-1;0]$ і $[1;\infty)$, зростає $(-\infty;-1]$ і $[0;1]$. **1.4.** спадає $(-\infty;-2]$ і $[0;2]$, зростає $[-2;0]$ і $[2;\infty]$. **1.5.** спадає $(-\infty;-1]$ і $(-1;0]$, зростає $[0;1)$ і $(1;\infty)$. **1.6.** спадає $[-8;-4]$ і $[1;5]$, зростає $[-4;1]$ і $[5;9]$. **1.7.** спадає $[-6;-3]$ і $[2;7]$, зростає $[-3;2]$. **2.1.** $x\in[-5;\infty)$. **2.2.** $x\in(-\infty;2]$. **2.3.** $x\in[16;\infty)$. **2.4.** $x\in(8;\infty)$. **2.5.** $x\in[-2;3]$. **2.6.** $x\in(-\infty;3]\cup[4;\infty)$. **2.7.** $\tilde{o}\in[-2;5]$.

2.8. $x\in[-4;-3)\cup(-3;2]$. **2.9.** $x\in\left(\frac{1}{2};1\right]\cup[2;\infty)$. **2.10.** $x\in(3;4)\cup(4;\infty)$.

2.11. $x\in[-5;-2)\cup(-2;\infty)$. **2.12.** $x\in\left(-\frac{2}{3};1\right)\cup(1;\infty)$. **2.13.** $x\in\left(-\frac{1}{3};0\right]\cup[3;\infty)$.

Відповіді до самостійної роботи №2

1.1. $a^{\frac{3}{4}}$. **1.2.** $a^{\frac{1}{6}}$. **1.3.** a^7. **1.4.** n^{-2}. **1.5.** a^8. **1.6.** c^2. **1.7.** $a^{\frac{2}{3}}-b$. **2.1.** $a^{\frac{1}{8}}+6$. **2.2.** $a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}+9$. **3.1.** 3. **3.2.** 4. **4.1.** $\sqrt{n}$. **4.2.** a^6. **4.3.** $\sqrt[16]{b}$. **4.4.** $\sqrt[4]{a}$. **4.5.** 8. **4.6.** 2. **5.1.** $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$. **5.2.** $\frac{1}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$. **6.1.** $\sqrt[3]{5}$. **6.2.** $\sqrt[5]{4x^{18}}$. **7.1.** $3a^2b\sqrt{a}$. **7.2.** $3y^2\sqrt[3]{2y^2}$. **8.1.** $2\sqrt[3]{3}$. **8.2.** $6\sqrt[4]{3}$. **9.1.** 81. **9.2.** 20. **9.3.** -7. **9.4.** $\frac{1}{27}$. **9.5.** 44. **10.1.** $\sqrt[9]{4} < \sqrt[9]{11}$. **10.2.** $2\sqrt[4]{3} > \sqrt[4]{26}$. **10.3.** $\sqrt[10]{7} < \sqrt[5]{3}$. **10.4.** $3\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{3}$. **11.1.** y. **11.2.** a. **11.3.** $a^{\frac{1}{4}}-3$. **11.4.** $-\frac{2}{b^{\frac{1}{2}}+8}$. **11.5.** $\frac{4}{2x^{\frac{1}{2}}}$. **11.6.** a. **11.7.** b. **11.8.** 1. **12.1.** 1. **12.2.** $\frac{7}{8}$. **13.1.** $\frac{1}{8}$. **13.2.** 1. **13.3.** $\frac{1}{25}$. **13.4.** $\frac{1}{7}$. **13.5.** $\frac{4}{9}$. **13.6.** $2^9=512$. **13.7.** 1. **13.8.** 3. **13.9.** 2. **13.10.** 12. **13.11.** 2. **13.12.** 1. **14.1.** 2. **14.2.** $\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}$ **14.3.** при $0\le a\le 4: 4$, при $a>4: 2\sqrt{a}$.

Відповіді до самостійної роботи №3

1. 9. **2.** 6. **3.** 16. **4.** -3; 3. **5.** 2. **6.** 1. **7.** 50. **8.** 8. **9.** 4. **10.** 7. **11.** -4. **12.** 1. **13.** 2. **14.** 8. **15.** 2. **16.** 6; 2,5. **17.** 5. **18.** -2,5; 1,5. **19.** 16. **20.** 1; 64. **21.** 63. **22.** -1. **23.** -2;5. **24.** -7;8. **25.** 0,5; 1; 2. **26.** 4. **27.** 6. **28.** -6; -5,5; -5. **29.** 0. **30.** 2.

Відповіді до самостійної роботи №4

1. 6. **2.** -1. **3.** 1. **4.** 4; 5. **5.** -2 **6.** 6. **7.** -2. **8.** -5; 3. **9.** 0; 3. **10.** 2. **11.** 1. **12.** $\frac{1}{2}$. **13.** 1. **14.** 1. **15.** $\frac{1}{3}$. **16.** -2,5. **17.** 2. **18.** 2,8. **19.** $x_1=-1, x_2=\frac{1}{20}$. **20.** 0; $\frac{1}{4}$. **21.** -1; 1. **22.** 1. **23.** -1. **24.** 0; 1. **25.** -1. **26.** 1. **27.** 2. **28.** -2; 2. **29.** -3; $\frac{1}{6}$. **30.** 0; 1. **31.** 3; 2. **32.** 1; 4. **33.** 0; 4.

Відповіді до самостійної роботи №5

1. $(2;+\infty)$. **2.** $(-1;+\infty)$. **3.** $[2;+\infty)$. **4.** $[-6;1]$ **5.** $(-2;0)$. **6.** $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **7.** $(-\infty;-3]\cup$ $\cup[3;+\infty)$. **8.** $[-1;5)$. **9.** $[1;3)\cup[6;+\infty)$. **10.** $(-\infty;-4]\cup(0;1]$. **11.** $[3;+\infty)$. **12.** $(-\infty;-1)$. **13.** $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. **14.** $(1;2)$. **15.** $(1;+\infty)$. **16.** $(2;11)$. **17.** $(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$. **18.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **19.** $(-2;1)$. **20.** $[-1;0]$. **21.** $(-\infty;1]$. **22.** $(3;+\infty)$.

Відповіді до самостійної роботи №6

1. $x \in (-\infty;\infty)$.**2.** $x \in (-\infty;\infty)$. **3.** $x \in (9;\infty)$. **4.** $x \in (-2;\infty)$. **5.** $x \in (-\infty;2)$.**6.** $x \in [2;\infty)$.
7. $x \in (-\infty;-1)$. **8.** $x \in (0;4)$.**9.** $x \in (-\infty;-3)$ **U** $(0;1)$. **10.** $x \in \left(-\infty;\frac{1}{5}\right)$**U**$\left(\frac{1}{3};\infty\right)$.
11. $x \in \left(\frac{1}{3};\infty\right)$. **12.** $x \in (-1;0)$ **U** $(0;3)$. **13.** $x \in (2;3)$ **U** $(3;4)$. **14.** $x \in [1,5;\infty)$.
15. $x \in (1,5;3)$ **U** $(3;4)$ **U** $(4;\infty)$. **16.** $x \in (-4;2)$ **U** $(2;5)$. **17.** $x \in [-5;0)$**U** $(0;2]$.
18. $x \in (0;4)$ **U** $(4;5)$

Відповіді до самостійної роботи №7

1.1. 3. **1.2.** 5. **1.3.** 0;-3. **1.4.** -1. **1.5.** 3;9. **1.6.** 1. **1.7.** 2. **1.8.** 0,008;25. **1.9.** -3. **1.10.** $\emptyset$. **1.11.** 127; $2\frac{1}{5}$. **1.12.** 0. **1.13.** 4. **1.14.** 10^{8}; 100. **1.15.** 0,1; 1000. **1.16.** -18. **1.17.** 10. **1.8** .$\frac{1}{9}$; 3. **1.19.** 1.
1.20. 1;3. **1.21.** 10^4; 0,1. **1.22.** $\sqrt[11]{2^{60}}$. **1.23.** 2. **1.24.** 10. **2.1.** $(0;9)$. **2.2.** $(1003;\infty)$. **2.3.** $(3;\infty)$.
2.4. $(2;11)$. **2.5.** $(0;125]$. **2.6.** $[8;\infty)$. **2.7.** $(0;3]$. **2.8.** $[1;3)$. **2.9.** $[-1;0)\cup(3;4]$. **2.10.** $[3;\infty)$.
2.11. $(10;82)$. **2.12.** $\left(0;\frac{1}{5}\right)\cup(25;\infty)$. **2.13.** $(5;\infty)$. **2.14.** $[-4;-1)\cup(2;3]$. **2.15.** $(-10;0)$.
2.16. $(9;9,5]$. **2.17.** $[3;\infty)$. **2.18.** $\left(2+\sqrt{2};4\right)$. **2.19.** $\left(0;\frac{1}{123}\right]\cup[3;\infty)$. **2.20.** $\left(1,5;1\frac{8}{9}\right)$.

Відповіді до самостійної роботи №8

1. а) $-\frac{1}{2}$; **б)** $\sin 65^o$; **в)** $-\frac{1}{2}$; **г)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; **2. а)** 0; **б)** $\sin\propto - \cos\propto$; **в)** 0; **г)** -1; **3. а)**$-\frac{4}{5}$; б) $\frac{24}{25}$; **в)** $-\frac{7}{25}$; **г)** $\frac{119}{169}$; **4.а)** 2; **б)** $2\sin^2\propto$; **в)** $\cos^2\propto$; **г)** 1; **д)** $\cos\propto$; **е)**$\cos^2\propto$; **є)** 1; **ж)** $\sin^2\propto$;
5. а) $\cos 8\propto$; **б)** $\cos 6\propto$; **в)** 1; **г)** $\sin 3\propto$; **д)** $\cos 3\propto + \sin 3\propto$; **е)** $\sin 2\propto$; **6.** а) $\cos 4\beta$;
б) $\sin 8\propto$; **в)** $-2\sin 5\propto$; **г)** $2\sin 4\propto$; **д)** $\sin\propto\cos\beta$; **е)** $\sin\propto\sin\beta$; **7.а)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\frac{1}{2}$; **в)** 0; **г)** $\frac{1}{2}$; **8. а)** -1; **б)** $\cos^2\propto$; **9.а)** $\sin\propto=\frac{3}{5}$; $\mathrm{tg}\propto=\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\propto=1\frac{1}{3}$; б) $\sin\propto=-\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\propto=\frac{3\sqrt{10}}{10}$;
$\mathrm{ctg}\propto=-3$. **в)** $\sin\propto=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\propto=-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\mathrm{tg}\propto=2$; **10.а)** 2; **б)** 0; **в)** $2\cos 2\propto$; **г)** $\sin 2\propto$;
д) $\mathrm{tg}\propto$; е) 1; **12.** а) 1; б) $\mathrm{tg}\propto$; **13.** а) -1; **б)** $-\frac{33}{65}$; **14.** а) $\frac{1}{\cos 2\propto}$; **б)** $\frac{1}{2}\sin\propto$; **в)** $4\mathrm{ctg}\propto$; **г)** $\frac{2\sin\propto}{\sin 4\propto}$; **д)** 1; **15.**$\frac{3\sqrt{6}}{3}$.

Відповіді до самостійної роботи №9

1.$(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$ **2.**$-\frac{4}{3}\pi+4\pi k,\ k\in Z$ **3.**$\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$
4.$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2},\ k\in Z$ **5.**Коренів немає. **6.**$\frac{11}{12}\pi+\pi k,\ k\in Z$
7. а)$(-1)^k\cdot\frac{\pi}{30}+\frac{\pi k}{5},\ k\in Z$ б)$\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7},\ k\in Z$
8. а)$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi k}{4},\ k\in Z$ б)$\frac{\pi k}{5};\ \frac{\pi k}{4},\ k\in Z$
9. а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ б)$2\pi k,\ k\in Z$
10. а)$\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$ б)$\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\mathrm{arctg}15+\pi k,\ k\in Z$
11.$-\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$ **12.**$\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$
13.а) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$ б)$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

14. а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ б) $\frac{\pi k}{4};\quad \pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

15. а) $\frac{\pi k}{5};\quad \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$ б) $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{2\pi k}{5};\ \pi+2\pi k,\ k\in Z$

16. а) $\frac{\pi k}{3};\quad \frac{\pi}{22}+\frac{\pi k}{11},\ k\in Z$ б) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4};\ \pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

17. а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, -\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z$ б) $\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

18. $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$

19. $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -2\mathrm{arctg}11+2\pi k,\ k\in Z$

20. $\frac{\pi k}{2},\ (-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7},\ k\in Z$

21. $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

22. $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7},\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

23. $\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

24. $\pi k-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

25. $\pi k;\ \pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

26. 2

27. $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\pi k,\ k\in Z$

Відповіді до самостійної роботи №10

1. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$

2. $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z$

3. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$

4. $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$

5. $[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n),\ n\in Z$

6. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in Z$

7. $(\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n],\ n\in Z$

8. $(\mathrm{arcctg}\,2+\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z$

9. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in Z$

10. $\left(\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}\right),\ n\in Z$

11. $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z$

12. $\left[\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}\right],\ n\in Z$

13. $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pi n\right],\ n\in Z$

14. $\left(\frac{5\pi}{6}+4\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+4\pi n\right),\ n\in Z$

15. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$

16. $\left[\frac{17\pi}{60}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{22\pi}{60}+\frac{\pi n}{2}\right],\ n\in Z$

17. $[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n)\cup,\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$

18. $[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \arcsin\frac{1}{4}+2\pi n)\cup,\left(\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$

19. $(\mathrm{arctg}\,2+\pi n;\ \mathrm{arctg}\,3+\pi n),\ n\in Z$

20. $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$

21. $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z$

22. $x\neq\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in Z$

23. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z$

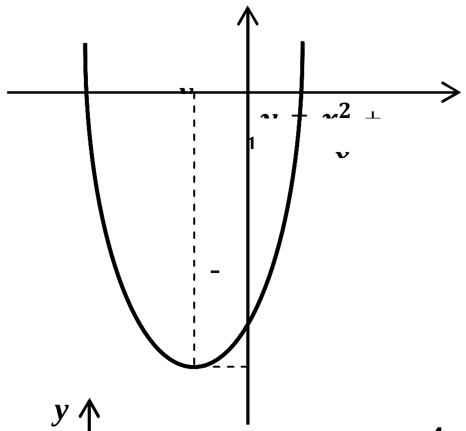
24. $\left[-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right],\ n\in Z$

Відповіді до самостійної роботи №11

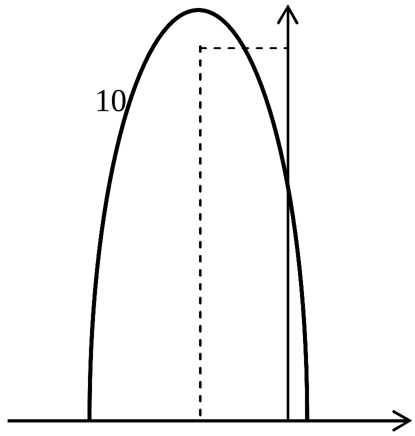
1. $12x^2+x$. **2.** x^4+x^3-6x. **3.** $24x^2(x^3-1)$. **4.** $(8^x ln8+10x-3x^2)\log_5 x+\frac{8^x+5x^2-x^3}{xln5}$.
5. $\frac{41}{(2x+9)^2}$. **6.** $\frac{1}{cos^2x}$ **7.** $9(x^4-5x^2)^8(4x^3-10x)$. **8.** $(5x^4-2)\cos(x^5-2x)$. **9.** $.-8^{\cos x}ln8\times sinx$.
10. $\frac{cosx}{2\sqrt{\sin x}}$. **11.** $\frac{1}{4}-\frac{5}{x^2}-x$. **12.** $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **13.** $2x(3x^2-1)^2(x^2+1)^3(21x^2+5)$.
14 $-3\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2\frac{x^2-2x-1}{(1-x^2)^2}$. **15.**. $\frac{2x+3}{(x^2+3x-1)ln3}$. **16.** $-3cos^2xsinx$. **17.** $234sin^2 13x\,cos13x$.
18. $\frac{5(4x^3+2)}{8\sqrt[8]{(x^4+2x-7)^3}}$. **19.** $-\frac{9}{x^4}+\frac{1}{7x\sqrt{x}}$ **20.** $-2sin2x$. **21.** $5(3^x+5x^4)^4(3^x ln3+20x^3)9^{2x+3}+2\cdot 9^{2x+3}ln9(3^x+5x^4)^5$. **22.**. $16^{\sqrt{x^3+6x+14}}\cdot 2\,ln4\frac{3(x^2+2)}{2\sqrt{x^3+6x+14}}$. **23.**. $6lnsin(3x-2)ctg(3x-2)$.
24. $126\frac{sin^2 6x}{cos^4 6x}$. **25.** $-\frac{35}{ln3}log_3^4\cos 7x\,tg7x$. **26.** $-15x^2\cos cos^2(5x^3-6)\cdot sin(10x^3-12)$.

Відповіді до самостійної роботи №12

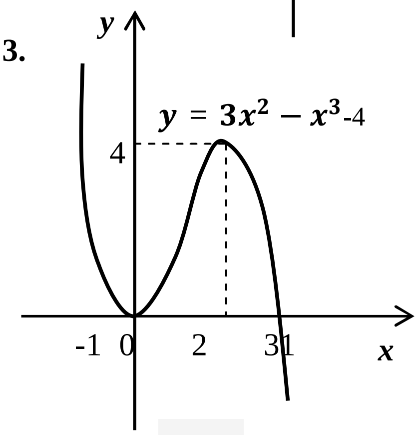
1.



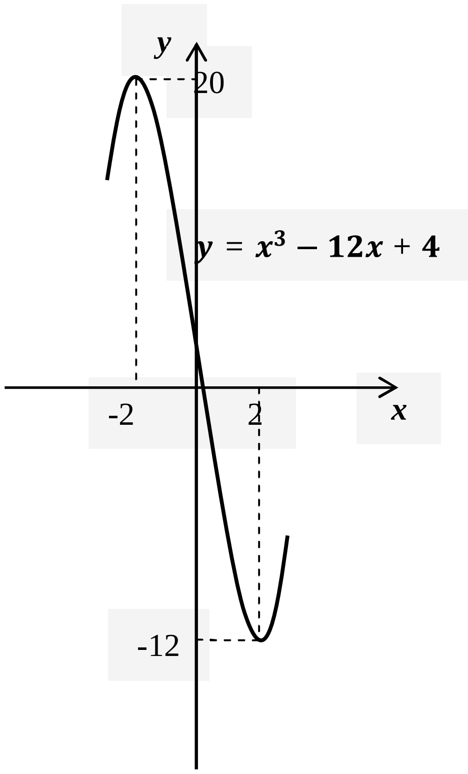
2.



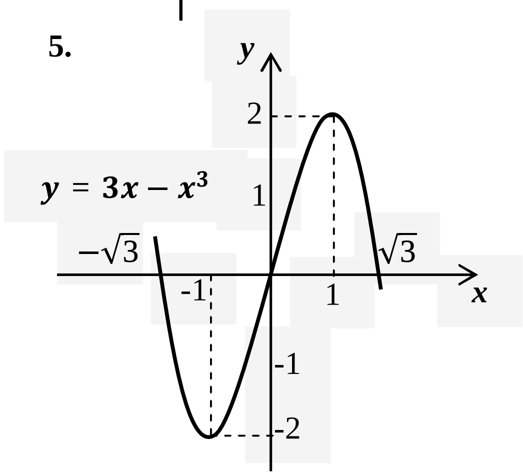
3.



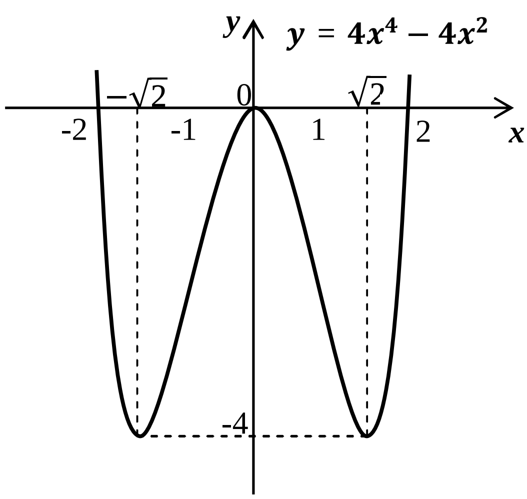
4.



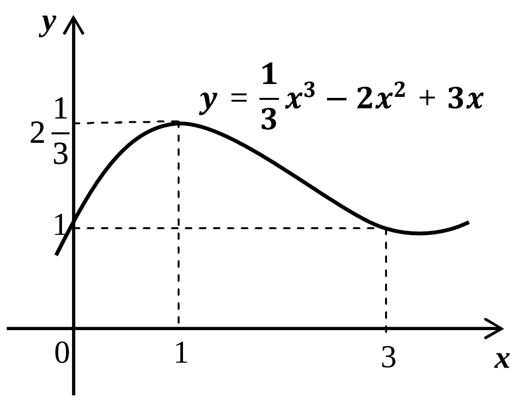
5.



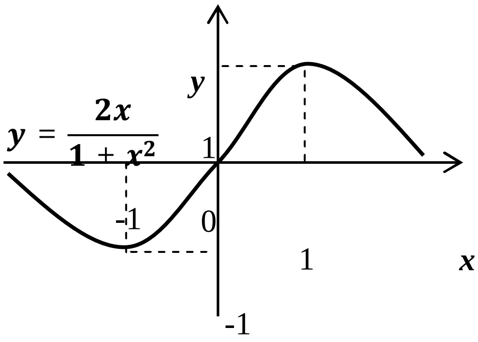
6.



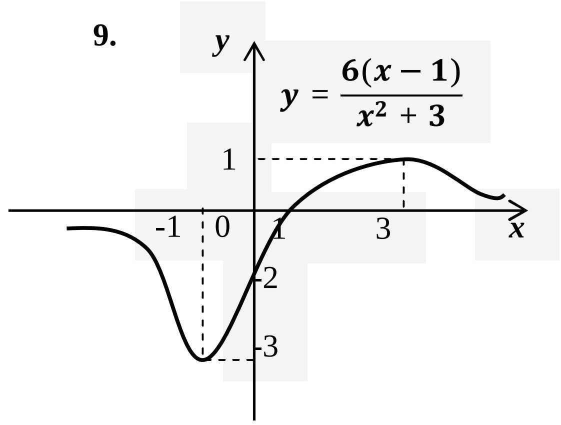
7.



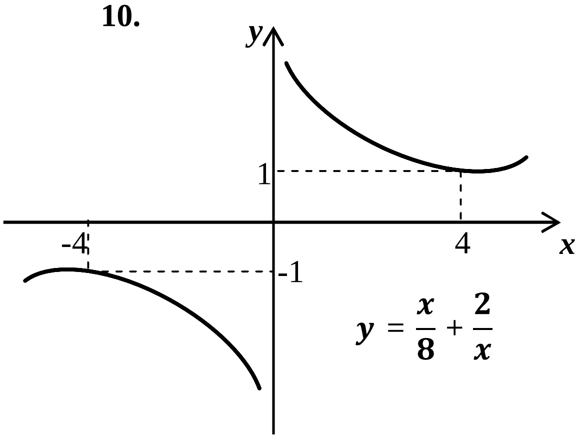
8.



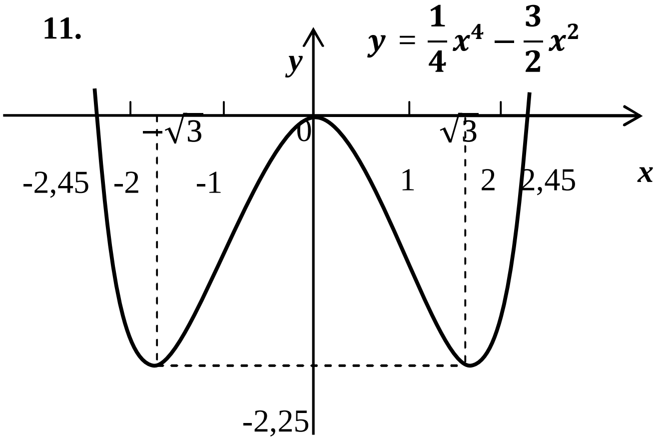
9.



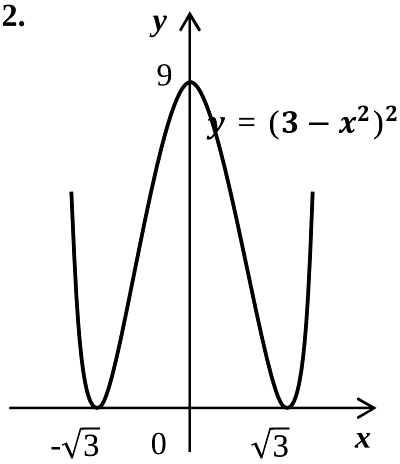
10.



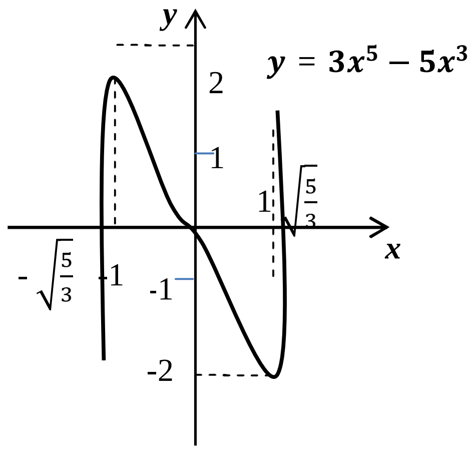
11.



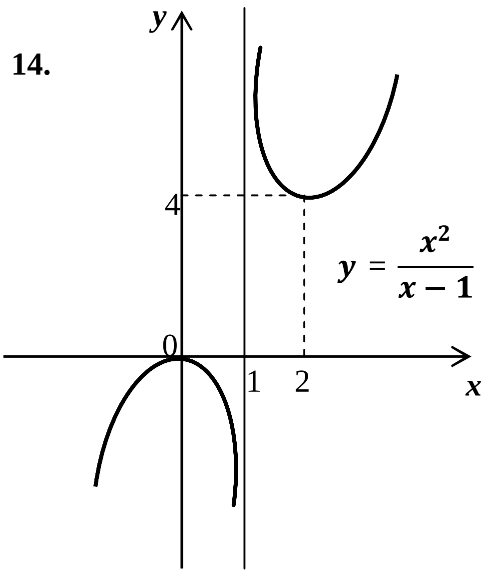
12.



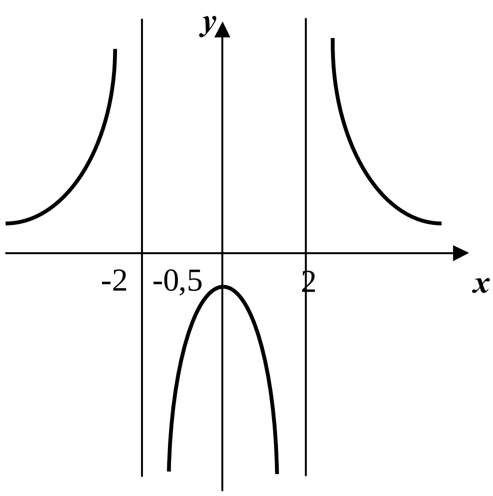
13.



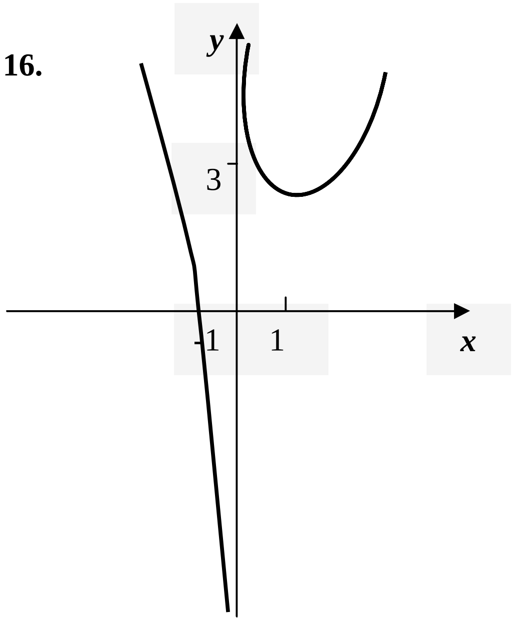
14.



15.



16.



Відповіді до самостійної роботи №13

1. а) $\max y(3) = 66$, $\min y(1) = 2$; **б)** $\max y(-2) = 11$, $\min y(-1) = 0$; **в)** $\max y(-1) = 2\frac{5}{6}$, $\min y(0) = \frac{2}{3}$ **2.** $\tilde{o} = \frac{1}{2}$. **3.** $\frac{\grave{a}}{2}$, $\frac{\grave{a}}{2}$. **4.** $\tilde{o} = \frac{1}{4}$. **5. а)** $\max y(-1) = 0$, $\min y(-2) = -3$; **б)** $\max y(0) = 8$, $\min y(2) = 4$.**6.** 3; 3. **7.** 5см, 5см. **8.** 40м, 40м. **9.** $\frac{l}{4}\grave{\imath}$, $\frac{l}{2}\grave{\imath}$. **11.** $h = r = \frac{a}{4+p}$.

12. $V_{\max} = \frac{rS}{2} - pr^2$, при $r_0 = \sqrt{\frac{S}{6p}}$.

Відповіді до самостійної роботи №14

1.1 $F(x) = \frac{x^2}{2} + 7x + C$. **1.2.** $F(x) = x^3 + 2x^2 + C$. **1.3.** $F(x) = \ln|x| + \frac{5^x}{\ln 5} + C$. **1.4.** $F(x) = 4\text{tg}x + \cos x + C$. **1.5.** $F(x) = 9\sin x - \text{ctg}x + C$. **1.6.** $F(x) = \frac{x^3}{12} + x^4 + C$. **1.7.** $F(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C$. **1.8.** $F(x) = \frac{(3x+5)^5}{15} + C$. **1.9.** $F(x) = -4\sqrt{6-2x} + C$. **1.10.** $F(x) = -\frac{1}{7}\cos(7x-3) + \frac{5^{4x-1}}{4\ln 5} + C$. **1.11.** $F(x) = 2\ln|2x-3| + \frac{2^{3x-4}}{3\ln 2} + 7x + C$. **1.12.** $F(x) = -\text{ctg}3x + 4\sin\frac{x}{4} + \frac{1}{4}e^{6-4x} + 8x^2 - x + C$ **1.13.** $F(x) = -3\sqrt{6-2x} + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{8}{7}x^7 - 4x + C$.
1.14. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + \frac{1}{3}\text{tg}(5-3x) + \frac{1}{8}e^x + C$. **1.15.** $F(x) = -\frac{45}{2}\sqrt[3]{6-2x} + \frac{3}{8(x+1)^8} + \frac{3}{6}\ln|6x-1| + 10x + C$. **1.16.** $F(x) = -\frac{3^{1-x}}{\ln 3} + \frac{5}{24}\sqrt[5]{(1-3x)^8} - 10\ln|1-x| - 8\cos\frac{x}{2} + C$.
1.17. $F(x) = 3\frac{1}{2}x - \frac{1}{48}(6x+1)^8 - \frac{1}{3}\sin(3x-8) + \frac{20}{3}\sqrt{3x+5} + C$. **1.18.** $F(x) = -\frac{4^{1-x}}{\ln 4} - \frac{3}{4(6-8x)^4} - \frac{4}{3}\text{tg}(2-3x) + x\ln 2 + C$. **2.1.** $F(x) = -\cos x - 3$. **2.2.** $F(x) = 3x^2 + 2$.
2.3. $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$. **2.4.** $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + 5$. **2.5.** $F(x) = -10\cos\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\sin 3x + 5\sqrt{2}$. **2.6.** $F(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 4$. **2.7.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + 3\frac{2}{3}$. **2.8.** $F(x) = \sqrt{4x+5} + 2$.
2.9. $F(x) = 2x^3 + \frac{1}{4}e^{4x} - 1 - 15e^2$. **2.10.** $F(x) = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} - \frac{24}{29}x^2\sqrt[12]{x^5 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}}$

Відповіді до самостійної роботи №15

1. 19,2 **2.** 6 **3.** 12 **4.** 18 **5.** 5 **6.** 1 **7.** 1 **8.** 0,5 **9.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** 3 **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $62\frac{1}{4}$ **14.** $4\ln 3 - 4$
15. 0 **16.** 3 **17.** 68 **18.** 3 **19.** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **20.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **21.** $1-\sqrt{3}$ **22.** $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$ **23.** 48,4 **24.** $-101\frac{1}{4}$
25. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ **26.** $8\sqrt{3}$ **27.** $1+\frac{\pi}{2}$ **28.** 3

Відповіді до самостійної роботи №16

1. $\frac{x^7}{7}+C$. **2.** $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$. **3.** $\frac{1}{4}x^8+C$. **4.** $\frac{3}{2}x^4-x^3+x^2-5x+C$. **5.** $8\ln|x|+C$.
6. $\frac{x^6}{6}+4e^x+C$. **7.** $x^7-\frac{7^x}{\ln 7}-\cos x+C$. **8.** $9\sin x+4ctgx+C$. **9.** $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x+C$.
10. $2x\sqrt{x}-\frac{6}{25}x\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{a^3x}+C$. **11.** $-\frac{3}{x}+\frac{1}{8x^2+C}$. **12.** $2x^2-4x+\ln|x|+C$. **13.** $-2\cos x+C$.
14. $x+3tgx+C$. **15.** $4tg\left(\frac{x}{4}-1\right)+C$. **16.** $\frac{1}{2}ctg(3-2x)+C$. **17.** $\frac{1}{81}(9x-5)^9+C$.
18. $\frac{1}{4}\sin(4x+5)+C$. **19.** $3tgx+2ctgx+C$. **20.** $\frac{30^x}{\ln 30}+C$.. **21.** $\frac{1}{14}\ln|14x-3|+C$. **22.** $\frac{2^{7x+3}}{7\ln 2}+C$.
23. $-\frac{1}{3}e^{5-3x}+C$. **24.** $\frac{5}{4}e^{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}x}+C$. **25.** $-\frac{15}{9\ln 5}\cdot 5^{\frac{1-9x}{15}}$. **26.** $x-3arctg\frac{x}{3}+C$.

Відповіді до самостійної роботи №17

1. 9; **2.** 4; **3.** 2; **4.** 2; 5. $20\frac{5}{6}$; **6.** $29\frac{1}{4}$; **7.** 20; **8.** $24\frac{2}{3}$; **9.** $20\frac{5}{6}$; **10.** $2\frac{2}{3}$; **11.** $4\frac{2}{3}$; **12.** $53\frac{1}{3}$
13. 4,5; **14.** 13; **15.** $12\frac{2}{3}$; **16.** $17\frac{1}{3}$; **17.** $\frac{16}{3}$; **18.** $9\frac{1}{3}$; **19.** 13,5; **20.** 12; **21.** 4,5; **22.** 9.

Відповіді до самостійної роботи №18

1. 98 см^2; **2.** 36 м^2; **3.** 296 см^2; **4.** $6\sqrt{3}$см^3; **5.** $108\sqrt{3}$см^3; **6.** 480 см^3; **7.** 144 см^3;
8. $50\frac{5}{8}$см^3; **9.** $\frac{1}{8}a^3ctg^2\frac{\mathcal{L}}{2}\cdot tg\,\varphi$; **10.** $2l^2\,tg\,\mathcal{L}\cdot\frac{tg\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$; **11.** 5400см^2; **12.** 24 см^2;
13. $2d^2\sin\mathcal{L}\left(\sqrt{\cos^2\mathcal{L}-\sin^2\beta}+\sin\beta\right)$; **14.** $a^3\sin\mathcal{L}\cdot\cos\frac{\mathcal{L}}{2}tg\beta$; **15.** $\frac{4S tg\beta}{\cos\frac{\mathcal{L}}{2}}$; **16.** 60 см^2.

Відповіді до самостійної роботи №19

1. $144\sqrt{3}$ см^3; **2.** 72 см^3; **3.** $64\sqrt{2}$см^2; **4.** 99 см^3; **5.** 6 см; **6.** 108 см^3; **7.** $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\mathcal{L}}{2}\tan\beta$;
8. $\frac{b^2\sin\beta}{\cos\mathcal{L}}$; **9.** $\frac{c^2\cos\mathcal{L}(\cos\mathcal{L}\sin\beta+\sin\beta+\sin\alpha)}{2\cos\beta}$; **10.** $\frac{3\sqrt{3}b^2}{\cos^2\beta}\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)$; **11.** 2 см; **12.** $\frac{485\sqrt{2}}{6}$см^3;
13. $\frac{1}{12}a^3\sin^2 2\mathcal{L}tg\beta$; **14.** $\frac{1}{4}H^3ctg^2\mathcal{L}\sqrt{3}$; **15.** 216 см^2; **16.** $\frac{a^3}{24}ctg\frac{\mathcal{L}}{2}tg\left(45^0-\frac{\mathcal{L}}{4}\right)tg\beta$.

Відповіді до самостійної роботи №20

1. 108π см^3; **2.** $18\sqrt{3}\pi$ см^3; **3.** 3 см; **4.** 128π см^3; **5.** $\frac{10}{13}$; **6.** 147π см^2; **7.** 192π см^3;
8. 60π см^2; **9.** $\pi d^2 \sin 2\mathcal{L}$; **10.** $\frac{\pi a^2 \tan\beta}{\cos^2\frac{\mathcal{L}}{2}}$; **11.** $\frac{1}{4}\pi d^2 \sin\mathcal{L}\cos^2\mathcal{L}$; **12.** $\frac{h^2 \sin\varphi}{2\cos^2\mathcal{L}}$;
15. $\frac{\pi H^2\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\frac{\mathcal{L}}{2}}}{\sin^2\beta\cos^2\frac{\mathcal{L}}{2}}$; **16.** $\frac{1}{3}\pi a^3\cos\frac{\mathcal{L}}{2}\sin\beta\left(1-\cos^2\frac{\mathcal{L}}{2}\sin^2\beta\right)$; **17.** $\frac{\pi S}{\sin\frac{\mathcal{L}}{2}}$; **18.** $\frac{\pi m^2}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\mathcal{L}}{2}\tan^2\mathcal{L}}}$.

Відповіді до самостійної роботи №21

1. $\frac{500\pi}{3}$ см^3; **2.** 4,5 см^2; **3.** 5; **4.** 400π см^2; **5.** $\frac{9}{16}$; **6.** у два рази; **7.** 4,5 π см^2 **8.** 1156π см^2;
9. $\frac{6500\pi}{3}$ см^3; **10.** 112500π см^3; **11.** $8\sqrt{2}$ см ; **12.** 676 см^2 ; **13.** 36 см; **14.** $144\,\frac{2}{3}\pi$.

Відповіді до самостійної роботи №22

1. 6; **2.** 20. **3.** C_{15}^5; **4.** $\frac{7}{20}$; **5** . $\frac{3}{7}$; **6.** $\frac{1}{2}$; **7. а)** $(-11; 12)$; **б)** 6; **в)** 4; **8.** 96; **9.** 13; **10.** 420;
11. 0,4; **12.** $\{0; 1; 2; 3\}$; **13. а)** 8; **б)** 9; **14.** $\frac{1}{336}$.